И. В. САВЕЛЬЕВ

КУРС ОБЩЕЙ ФИЗИКИ

ТОМ 4

•

ВОЛНЫ

•

ОПТИКА

•

УЧЕБНОЕ ПОСОБИЕ

Издание пятое, исправленное



• САНКТ-ПЕТЕРБУРГ •
• МОСКВА •
• КРАСНОДАР •
2021

ББК 22.3я73
С 12

Савельев И. В.

С 12 Курс общей физики. В 5 тт. Т. 4. Волны. Оптика: Учебное пособие. 5-е изд., испр. — СПб.: Издательство «Лань», 2021. — 256 с.: ил. — (Учебники для вузов. Специальная литература).

ISBN 978-5-8114-1206-8 (общий)
ISBN 978-5-8114-1210-5 (том 4)

Пятитомный курс общей физики, созданный И. В. Савельевым на базе лекций, которые он читал в Московском инженерно-физическом институте, знакомит студентов с основными идеями и методами физики.

Четвертый том включает материал, посвященный волнам и оптике.

Учебное пособие предназначено для студентов вузов, обучающихся по техническим направлениям и специальностям.

ББК 22.3я73

Координатор проекта
профессор *Н. М. КОЖЕВНИКОВ* (СПбГПУ)

Обложка
Л. А. АРНДТ

Оглавление

Предисловие

Содержание данной книги составляет учение об упругих, электромагнитных и световых волнах.

Изложение ведется в Международной системе единиц (СИ).

При подготовке книги к переизданию сделаны лишь небольшие исправления и уточнения. Наиболее существенным изменениям подвергся § 4.2, посвященный когерентности.

Следует отметить, что физика требует от учащегося обдумывания, размышлений. В усвоении материала основную роль должна играть память логическая, а не формальная. Запоминание должно достигаться через глубокое понимание. Над учебником нужно работать, обязательно проделывая все выкладки, не ограничиваясь только чтением книги.

Настоящий курс предназначен в первую очередь для втузов с расширенной программой по физике. Однако изложение построено так, что, опустив отдельные места, этот курс можно использовать в качестве учебного пособия для втузов с обычной программой.

В «Методических рекомендациях», помещенных перед основным текстом, приведен ориентировочный перечень сокращений в тексте, которые можно сделать в случае недостатка времени для изучения курса в полном объеме.

Методические рекомендации

В настоящих рекомендациях приводится ориентировочный перечень параграфов либо их частей, рассмотрение которых не обязательно в случае нехватки времени на изучение курса в полном объеме. Этот перечень отражает личную точку зрения автора и носит лишь рекомендательный характер.

1. В усвоении материала основную роль должна играть память логическая, а не формальная. Запоминание должно достигаться через глубокое понимание. Работать над учебником нужно «с карандашом в руках», обязательно проделывая все выкладки, не ограничиваясь только чтением книги. Материал можно считать усвоенным лишь в том случае, если удается спустя несколько часов (а еще лучше на следующий день) воспроизвести выкладки, не заглядывая в книгу или конспект.

2. В § 1.5 «Скорость упругих волн в твердой среде» все выкладки можно опустить и дать только окончательные формулы (1.36) и (1.37).

3. В § 1.6 «Энергия упругой волны» вывод формулы (1.42) можно опустить и начать изучение этого параграфа с самой формулы.

4. Первую часть § 3.3 до формул (3.33) и (3.34) можно опустить.

5. Параграф 3.7 «Центрированная оптическая система» можно исключить.

6. В § 4.2 «Когерентность» можно опустить выкладки, начинающиеся формулой (4.16) и заканчивающиеся формулой (4.18).

7. Параграф 4.6 «Многолучевая интерференция» можно исключить.

8. В § 5.7 «Дифракция рентгеновских лучей» можно опустить вывод формул Лауэ и сами эти формулы и ограничиться рассмотрением формулы Брэгга–Вульфа.

9. Параграф 5.9 «Голография» можно исключить.

10. Часть § 6.2, которая относится к формуле Френеля, можно не рассматривать.

11. В § 7.2 «Групповая скорость» можно ограничиться элементарным рассмотрением, заканчивающимся формулой (7.8). Выкладки, начинающиеся формулой (7.9) и заканчивающиеся формулой (7.14), можно опустить.

Часть I
Волны

Глава 1
Упругие волны

1.1. Распространение волн в упругой среде

Волнами называются возмущения, распространяющиеся в среде (или в вакууме) и несущие с собой энергию. Характерное свойство волн состоит в том, что перенос энергии волной осуществляется без переноса вещества.

Основными видами волн являются упругие (в частности, звуковые и сейсмические) волны, волны на поверхности жидкости и электромагнитные волны (к числу последних относятся, в частности, световые волны и радиоволны).

Волны могут иметь различную форму. Одиночной волной или импульсом называется короткое возмущение, не имеющее регулярного характера (рис. 1.1*а*). Ограниченный ряд повторяющихся возмущений называется цугом волн. Обычно под цугом понимают отрезок синусоиды (рис. 1.1*б*). Особое значение в теории волн имеет гармоническая волна, т. е. бесконечная синусоидальная волна, в которой изменение состояния среды происходит по закону синуса или косинуса (рис. 1.1*в*).

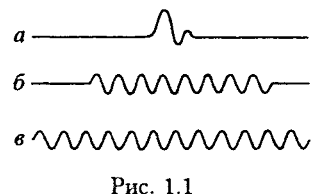


Рис. 1.1

Мы начнем с рассмотрения упругих гармонических волн. Если в каком-либо месте упругой (твердой, жидкой или газообразной) среды возбудить колебания ее частиц, то вследствие взаимодействия между частицами это колебание будет распространяться в среде от частицы к частице с некоторой скоростью v — в среде возникнет волна.

Частицы среды, в которой распространяется волна, не вовлекаются волной в поступательное движение, они лишь совершают колебания около своих положений равновесия.

В зависимости от направления колебаний частиц по отношению к направлению, в котором распространяется волна, различают продольные и поперечные. В продольной волне частицы среды колеблются вдоль направления распространения волны. В поперечной волне частицы среды колеблются в направлениях, перпендикулярных к направлению распространения волны. Упругие поперечные волны могут возникнуть лишь в среде, обладающей сопротивлением сдвигу. Поэтому в жидкой и газообразной средах возможно возникновение только продольных волн. В твердой среде возможно возникновение как продольных, так и поперечных волн.

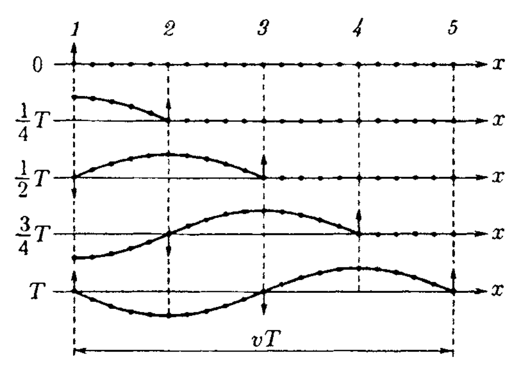


Рис. 1.2

На рис. 1.2 показано движение частиц при распространении в среде поперечной волны. Номерами *1*, *2* и т. д. обозначены частицы, отстоящие друг от друга на расстоянии, равном $vT/4$, т. е. на расстоянии, проходимом волной за четверть периода колебаний, совершаемых частицами. В момент времени, принятый за нулевой, волна, распространяясь вдоль оси слева направо, достигает частицы *1*, вследствие чего частица начинает смещаться из положения равновесия вверх, увлекая за собой следующие частицы. Спустя четверть периода частица *1* достигает крайнего верхнего положения; одновременно начинает смещаться из положения равновесия частица *2*. По прошествии еще четверти периода первая частица будет проходить положение равновесия, двигаясь в направлении сверху вниз, вторая частица достигнет крайнего верхнего положения, а третья частица начнет смещаться вверх из положения равновесия. В момент времени, рав-

ный T, первая частица закончит полный цикл колебания и будет находиться в таком же состоянии движения, как и в начальный момент. Волна к моменту времени T, пройдя путь vT, достигнет частицы 5.

На рис. 1.3 показано движение частицы при распространении в среде продольной волны. Все рассуждения, касающиеся поведения частиц в поперечной волне, могут быть отнесены и к данному случаю с заменой смещений

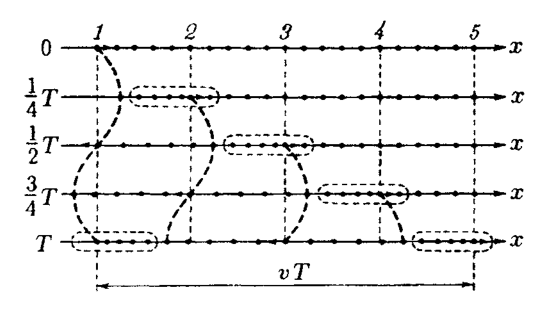


Рис. 1.3

вверх и вниз смещениями вправо и влево. Из рисунка видно, что при распространении продольной волны в среде создаются чередующиеся сгущения и разрежения частиц (места сгущения частиц обведены на рисунке штриховой линией), перемещающиеся в направлении распространения волны со скоростью v.

На рис. 1.2 и 1.3 показаны колебания частиц, положения равновесия которых лежат на оси x. В действительности колеблются не только частицы, расположенные вдоль оси x, а совокупность частиц, заключенных в некотором объеме. Распространяясь от источника колебаний, волновой процесс охватывает все новые и новые части пространства. Геометрическое место точек, до которых доходят колебания к моменту времени t, называется фронтом волны (или волновым фронтом). Фронт волны представляет собой ту поверхность, которая отделяет часть пространства, уже вовлеченную в волновой процесс, от области, в которой колебания еще не возникли.

Геометрическое место точек, колеблющихся в одинаковой фазе, называется волновой поверхностью. Волновую поверхность можно провести через любую точку пространства, охваченного волновым процессом. Следовательно, волновых поверхностей существует бесконечное

множество, в то время как волновой фронт в каждый момент времени только один. Волновые поверхности остаются неподвижными. Волновой фронт все время перемещается.

Волновые поверхности могут быть любой формы. В простейших случаях они имеют форму плоскости или сферы. Соответственно волна в этих случаях называется плоской или сферической. В плоской волне волновые поверхности представляют собой множество параллельных друг другу плоскостей, в сферической волне — множество концентрических сфер.

Рассмотрим случай, когда плоская волна распространяется вдоль оси x. Тогда все точки среды, положения равновесия которых имеют одинаковую координату x (но различные значения координат y и z), колеблются в одинаковой фазе.

На рис. 1.4 изображена кривая, которая дает смещение ξ из положения равновесия точек с различными x в некоторый момент времени. Не следует воспринимать этот рисунок как зримое изображение волны. На рисунке по-

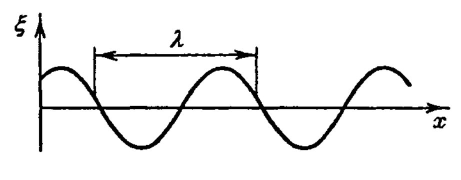


Рис. 1.4

казан график функции $\xi(x,t)$ для некоторого фиксированного момента времени t. С течением времени график перемещается вдоль оси x. Такой график можно строить как для продольной, так и для поперечной волны. В обоих случаях он выглядит одинаково.

Расстояние λ, на которое распространяется волна за время, равное периоду колебаний частиц среды, называется длиной волны. Очевидно, что

$$\lambda = vT, \tag{1.1}$$

где v — скорость волны, T — период колебаний. Длину волны можно определить также как расстояние между ближайшими точками среды, колеблющимися с разностью фаз, равной 2π (см. рис. 1.4).

Заменив в соотношении (1.1) T на $1/\nu$ (ν — частота колебаний), получим

$$\lambda\nu = v. \tag{1.2}$$

К этой формуле можно прийти также из следующих соображений. За одну секунду источник волн совершает ν колебаний, порождая в среде при каждом колебании один «гребень» и одну «впадину» волны. К тому моменту, когда источник будет завершать ν-е колебание, первый «гребень» успеет пройти путь v. Следовательно, ν «гребней» и «впадин» волны должны уложиться на длине v.

1.2. Уравнения плоской и сферической волн

Уравнением волны называется выражение, которое дает смещение колеблющейся частицы как функцию ее координат x, y, z и времени t:

$$\xi = \xi(x, y, z; t) \tag{1.3}$$

(имеются в виду координаты равновесного положения частицы). Эта функция должна быть периодической как относительно времени t, так и относительно координат x, y, z. Периодичность по времени вытекает из того, что ξ описывает колебания частицы с координатами x, y, z. Периодичность по координатам следует из того, что точки, отстоящие друг от друга на расстояние λ, колеблются одинаковым образом.

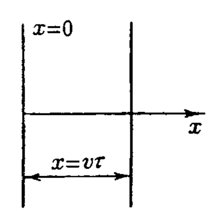


Рис. 1.5

Найдем вид функции ξ в случае плоской волны, предполагая, что колебания носят гармонический характер. Для упрощения направим оси координат так, чтобы ось x совпала с направлением распространения волны. Тогда волновые поверхности будут перпендикулярными к оси x и, поскольку все точки волновой поверхности колеблются одинаково, смещение ξ будет зависеть только от x и t: $\xi = \xi(x, t)$. Пусть колебания точек, лежащих в плоскости $x = 0$ (рис. 1.5), имеют вид

$$\xi(0, t) = a\cos(\omega t + \alpha).$$

Найдем вид колебания точек в плоскости, соответствующей произвольному значению x. Для того чтобы пройти

путь от плоскости $x = 0$ до этой плоскости, волне требуется время $\tau = x/v$ (v — скорость распространения волны). Следовательно, колебания частиц, лежащих в плоскости x, будут отставать по времени на τ от колебаний частиц в плоскости $x = 0$, т. е. будут иметь вид

$$\xi(x,t) = a\cos[\omega(t-\tau)+\alpha] = a\cos[\omega(t-x/v)+\alpha].$$

Итак, уравнение плоской волны (и продольной, и поперечной), распространяющейся в направлении оси x, выглядит следующим образом:

$$\xi = a\cos[\omega(t-x/v)+\alpha]. \qquad (1.4)$$

Величина a представляет собой амплитуду волны. Начальная фаза волны α определяется выбором начал отсчета x и t. При рассмотрении одной волны начала отсчета времени и координаты обычно выбираются так, чтобы α была равной нулю. При совместном рассмотрении нескольких волн сделать так, чтобы для всех них начальные фазы равнялись нулю, как правило, не удается.

Зафиксируем какое-либо значение фазы, стоящей в уравнении (1.4), положив

$$\omega(t-x/v)+\alpha = \text{const}. \qquad (1.5)$$

Это выражение определяет связь между временем t и тем местом x, в котором фаза имеет зафиксированное значение. Вытекающее из него значение dx/dt дает скорость, с которой перемещается данное значение фазы. Продифференцировав выражение (1.5), получим

$$dt - \frac{1}{v}dx = 0,$$

откуда

$$\frac{dx}{dt} = v. \qquad (1.6)$$

Таким образом, скорость распространения волны v в уравнении (1.4) есть скорость перемещения фазы, в связи с чем ее называют **фазовой скоростью**.

Согласно (1.6) $dx/dt > 0$. Следовательно, уравнение (1.4) описывает волну, распространяющуюся в сторону возрастания x. Волна, распространяющаяся в противоположном направлении, описывается уравнением

$$\xi = a\cos[\omega(t+x/v)+\alpha]. \qquad (1.7)$$

Действительно, приравняв константе фазу волны (1.7) и продифференцировав получившееся равенство, придем к соотношению

$$\frac{dx}{dt} = -v,$$

из которого следует, что волна (1.7) распространяется в сторону убывания x.

Уравнению плоской волны можно придать симметричный относительно x и t вид. Для этого введем величину

$$k = 2\pi/\lambda, \tag{1.8}$$

которая называется волновым числом. Умножив числитель и знаменатель выражения (1.8) на частоту ν, можно представить волновое число в виде

$$k = \omega/v \tag{1.9}$$

(см. формулу (1.2)). Раскрыв в (1.4) круглые скобки и приняв во внимание (1.9), придем к следующему уравнению плоской волны, распространяющейся вдоль оси x:

$$\xi = a\cos(\omega t - kx + \alpha). \tag{1.10}$$

Уравнение волны, распространяющейся в сторону убывания x, отличается от (1.10) только знаком при члене kx.

При выводе формулы (1.10) мы предполагали, что амплитуда колебаний не зависит от x. Для плоской волны это наблюдается в том случае, когда энергия волны не поглощается средой. При распространении в поглощающей энергию среде интенсивность волны с удалением от источника колебаний постепенно уменьшается — наблюдается затухание волны. Опыт показывает, что в однородной среде такое затухание происходит по экспоненциальному закону: $a = a_0 \exp(-\gamma x)$ (ср. с убыванием во времени амплитуды затухающих колебаний; см. формулу (8.104) кн. 1). Соответственно уравнение плоской волны имеет следующий вид:

$$\xi = a_0 \exp(-\gamma x) \cos(\omega t - kx + \alpha) \tag{1.11}$$

(a_0 — амплитуда в точках плоскости $x = 0$).

Теперь найдем уравнение сферической волны. Всякий реальный источник волн обладает некоторой протяженностью. Однако если ограничиться рассмотрением волны на расстояниях от источника, значительно превышающих его размеры, то источник можно считать точечным. В

изотропной и однородной среде волна, порождаемая точечным источником, будет сферической. Допустим, что фаза колебаний источника равна $\omega t + \alpha$. Тогда точки, лежащие на волновой поверхности радиуса r, будут колебаться с фазой

$$\omega(t - r/v) + \alpha = \omega t - kr + \alpha$$

(чтобы пройти путь r, волне требуется время $\tau = r/v$). Амплитуда колебаний в этом случае, даже если энергия волны не поглощается средой, не остается постоянной — она убывает с расстоянием от источника по закону $1/r$ (см. § 1.6). Следовательно, уравнение сферической волны имеет вид

$$\xi = \frac{a}{r}\cos(\omega t - kr + \alpha), \qquad (1.12)$$

где a — постоянная величина, численно равная амплитуде на расстоянии от источника, равном единице. Размерность a равна размерности колеблющейся величины, умноженной на размерность длины. Для поглощающей среды в (1.12) нужно добавить множитель $\exp(-\gamma r)$.

Напомним, что в силу сделанных предположений уравнение (1.12) справедливо только при r, значительно превышающих размеры источника. При стремлении r к нулю выражение для амплитуды обращается в бесконечность. Этот абсурдный результат объясняется неприменимостью уравнения для малых r.

1.3. Уравнение плоской волны, распространяющейся в произвольном направлении

Найдем уравнение плоской волны, распространяющейся в направлении, образующем с осями координат x, y, z углы α, β, γ. Пусть колебания в плоскости, проходящей через начало координат (рис. 1.6), имеют вид

$$\xi_0 = a\cos(\omega t + \alpha). \qquad (1.13)$$

Возьмем волновую поверхность (плоскость), отстоящую от начала координат на расстояние l. Колебания в этой плоскости будут отставать от колебаний (1.13) на время $\tau = l/v$:

$$\xi = a\cos[\omega(t - l/v) + \alpha] = a\cos(\omega t - kl + \alpha) \qquad (1.14)$$

($k = \omega/v$; см. формулу (1.9)).

Выразим l через радиус-вектор точек рассматриваемой поверхности. Для этого введем единичный вектор $\mathbf{n}$ нормали к волновой поверхности. Из рис. 1.6 видно, что скалярное произведение $\mathbf{n}$ на радиус-вектор $\mathbf{r}$ любой из точек поверхности равно l:

$$\mathbf{nr} = r\cos\varphi = l.$$

Заменим в (1.14) l на $\mathbf{nr}$:

$$\xi = a\cos(\omega t - k\mathbf{nr} + \alpha). \quad (1.15)$$

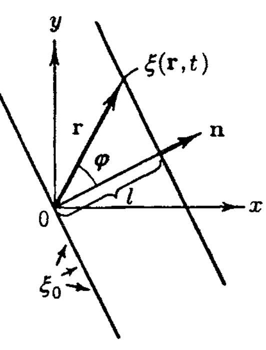


Рис. 1.6

Вектор

$$\mathbf{k} = k\mathbf{n}, \quad (1.16)$$

равный по модулю волновому числу $k = 2\pi/\lambda$ и имеющий направление нормали к волновой поверхности, называется **волновым вектором**. Таким образом, уравнение (1.15) можно представить в виде

$$\xi(\mathbf{r}, t) = a\cos(\omega t - \mathbf{kr} + \alpha). \quad (1.17)$$

Мы получили уравнение плоской незатухающей волны, распространяющейся в направлении, определяемом волновым вектором $\mathbf{k}$. Для затухающей волны нужно добавить в уравнение множитель $\exp(-\gamma r)$.

Функция (1.17) дает отклонение от положения равновесия точки с радиусом-вектором $\mathbf{r}$ в момент времени t (напомним, что $\mathbf{r}$ определяет равновесное положение точки). Чтобы перейти от радиуса-вектора точки к ее координатам x, y, z, выразим скалярное произведение $\mathbf{kr}$ через компоненты векторов по координатным осям:

$$\mathbf{kr} = k_x x + k_y y + k_z z.$$

Тогда уравнение плоской волны примет вид

$$\xi(x, y, z; t) = a\cos(\omega t - k_x x - k_y y - k_z z + \alpha). \quad (1.18)$$

Здесь

$$k_x = \frac{2\pi}{\lambda}\cos\alpha, \quad k_y = \frac{2\pi}{\lambda}\cos\beta, \quad k_z = \frac{2\pi}{\lambda}\cos\gamma. \quad (1.19)$$

Функция (1.18) дает отклонение точки с координатами x, y, z в момент времени t. В случае, когда $\mathbf{n}$ совпадает с $\mathbf{e}_x$,

$k_x = k$, $k_y = k_z = 0$ и уравнение (1.18) переходит в (1.10). Очень удобна запись уравнения плоской волны в виде

$$\xi = \mathrm{Re}\, a \exp[i(\omega t - \mathbf{kr} + \alpha)]. \tag{1.20}$$

Знак Re обычно опускают, подразумевая, что берется только вещественная часть соответствующего выражения. Кроме того, вводят комплексное число

$$\hat{a} = a \exp(i\alpha), \tag{1.21}$$

которое называют **комплексной амплитудой**. Модуль этого числа дает амплитуду, а аргумент — начальную фазу волны.

Таким образом, уравнение плоской незатухающей волны можно представить в виде

$$\xi = \hat{a} \exp[i(\omega t - \mathbf{kr})]. \tag{1.22}$$

Преимущества такой записи выяснятся в дальнейшем.

1.4. Волновое уравнение

Уравнение любой волны является решением дифференциального уравнения, называемого **волновым**. Чтобы установить вид волнового уравнения, сопоставим вторые частные производные по координатам и времени от функции (1.18), описывающей плоскую волну. Продифференцировав эту функцию дважды по каждой из переменных, получим

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = -\omega^2 a \cos(\omega t - \mathbf{kr} + \alpha) = -\omega^2 \xi,$$

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} = -k_x^2 a \cos(\omega t - \mathbf{kr} + \alpha) = -k_x^2 \xi,$$

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial y^2} = -k_y^2 a \cos(\omega t - \mathbf{kr} + \alpha) = -k_y^2 \xi,$$

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial z^2} = -k_z^2 a \cos(\omega t - \mathbf{kr} + \alpha) = -k_z^2 \xi,$$

Сложение производных по координатам дает

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \xi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \xi}{\partial z^2} = -(k_x^2 + k_y^2 + k_z^2)\xi = -k^2 \xi. \tag{1.23}$$

Сопоставив эту сумму с производной по времени и заменив k^2/ω^2 на $1/v^2$ (см. (1.9)), получим уравнение

$$\frac{\partial^2\xi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\xi}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\xi}{\partial z^2}=\frac{1}{v^2}\frac{\partial^2\xi}{\partial t^2}. \qquad (1.24)$$

Это и есть волновое уравнение. Его можно записать в виде

$$\Delta\xi=\frac{1}{v^2}\frac{\partial^2\xi}{\partial t^2}, \qquad (1.25)$$

где Δ — оператор Лапласа (см. формулу (1.108) кн. 2).

Легко убедиться в том, что волновому уравнению удовлетворяет не только функция (1.18), но и любая функция вида

$$f(x,y,z;t)=f(\omega t-k_x x-k_y y-k_z z+\alpha). \qquad (1.26)$$

Действительно, обозначив выражение, стоящее в скобках в правой части (1.26), через ζ, имеем

$$\frac{\partial f}{\partial t}=\frac{df}{d\zeta}\frac{d\zeta}{\partial t}=f'\omega, \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial t^2}=\omega\frac{df'}{\partial\zeta}\frac{\partial\zeta}{\partial t}=\omega^2 f''. \qquad (1.27)$$

Аналогично

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=k_x^2 f'', \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=k_y^2 f'', \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}=k_z^2 f''. \qquad (1.28)$$

Подстановка выражений (1.27) и (1.28) в уравнение (1.24) приводит к выводу, что функция (1.26) удовлетворяет волновому уравнению, если положить $v=\omega/k$.

Всякая функция, удовлетворяющая уравнению вида (1.24), описывает некоторую волну, причем корень квадратный из величины, обратной коэффициенту при $\partial^2\xi/\partial t^2$, дает фазовую скорость этой волны.

Отметим, что для плоской волны, распространяющейся вдоль оси x, волновое уравнение имеет вид

$$\frac{\partial^2\xi}{\partial x^2}=\frac{1}{v^2}\frac{\partial^2\xi}{\partial t^2}. \qquad (1.29)$$

1.5. Скорость упругих волн в твердой среде

Пусть в направлении оси x распространяется продольная плоская волна. Выделим в среде цилиндрический объем с площадью основания S и высотой Δx (рис. 1.7). Смещения ξ частиц с разными x в каждый момент времени оказываются различными (см. рис. 1.4, на котором изображено ξ в функции от x). Если основание цилиндра с координатой x имеет в некоторый момент времени смещение ξ, то смещение основания с координатой $x + \Delta x$ будет $\xi + \Delta\xi$. Поэтому рассматриваемый объем деформируется — он получает удлинение $\Delta\xi$ ($\Delta\xi$ — алгебраическая величина, $\Delta\xi < 0$ соответствует сжатию цилиндра) или относительное удлинение $\Delta\xi/\Delta x$. Величина $\Delta\xi/\Delta x$ дает среднюю деформацию цилиндра. Вследствие того, что ξ меняется с изменением x не по линейному закону, истинная деформация в разных сечениях цилиндра будет неодинаковой.

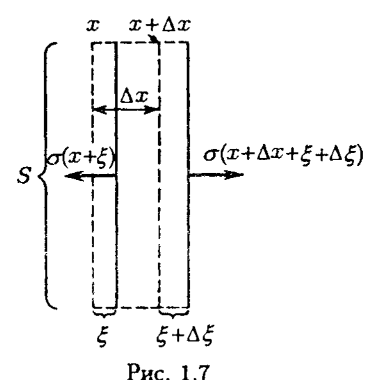


Рис. 1.7

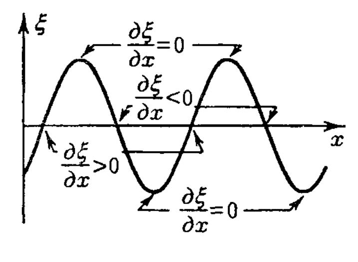


Рис. 1.8

Чтобы получить деформацию ε в сечении x, нужно устремить Δx к нулю. Таким образом,

$$\varepsilon = \frac{\partial\xi}{\partial x} \qquad (1.30)$$

(символ частной производной взят потому, что ξ зависит не только от x, но и от t).

Наличие деформации растяжения свидетельствует о существовании нормального напряжения σ, при малых деформациях пропорционального величине деформации. Согласно формуле (2.26) кн. 1

$$\sigma = E\varepsilon = E\frac{\partial\xi}{\partial x} \qquad (1.31)$$

(E — модуль Юнга среды). Отметим, что относительная деформация $\partial\xi/\partial x$, а следовательно, и напряжение σ в фиксированный момент времени зависят от x (рис. 1.8). Там, где отклонения частиц от положения равновесия максимальны, деформация и напряжение равны нулю. В местах, где частицы проходят через положение равновесия, деформация и напряжение достигают максимального значения, причем положительные и отрицательные деформации (т. е. растяжения и сжатия) чередуются друг с другом. В соответствии с этим, как уже отмечалось в § 1.1, продольная волна состоит из чередующихся разрежений и сгущений среды.

Обратимся снова к цилиндрическому объему, изображенному на рис. 1.7, и напишем для него уравнение движения. Полагая Δx очень малым, проекцию ускорения на ось x можно считать для всех точек цилиндра одинаковой и равной $d^2\xi/dt^2$. Масса цилиндра равна $\rho S\Delta x$, где ρ — плотность недеформированной среды. Проекция на ось x силы, действующей на цилиндр, равна произведению площади основания цилиндра S на разность нормальных напряжений в сечениях $x+\Delta x+\xi+\Delta\xi$ и $x+\xi$:

$$F_x = SE\left[\left(\frac{\partial\xi}{\partial x}\right)_{x+\Delta x+\xi+\Delta\xi} - \left(\frac{\partial\xi}{\partial x}\right)_{x+\xi}\right]. \qquad (1.32)$$

Значение производной $\partial\xi/\partial x$ в сечении $x+\delta$ можно для малых δ представить с большой точностью в виде

$$\left(\frac{\partial\xi}{\partial x}\right)_{x+\delta} = \left(\frac{\partial\xi}{\partial x}\right)_x + \left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial\xi}{\partial x}\right)\right]_x \delta = \left(\frac{\partial\xi}{\partial x}\right)_x + \frac{\partial^2\xi}{\partial x^2}\delta, \qquad (1.33)$$

где под $\partial^2\xi/\partial x^2$ подразумевается значение второй частной производной ξ по x в сечении x.

Ввиду малости величин Δx, ξ и $\Delta\xi$ произведем в выражении (1.32) преобразование (1.33):

$$F_x = SE\left\{\left[\left(\frac{\partial\xi}{\partial x}\right)_x + \frac{\partial^2\xi}{\partial x^2}(\Delta x+\xi+\Delta\xi)\right] - \left[\left(\frac{\partial\xi}{\partial x}\right)_x + \frac{\partial^2\xi}{\partial x^2}\xi\right]\right\} = SE\frac{\partial^2\xi}{\partial x^2}(\Delta x+\Delta\xi) \sim SE\frac{\partial^2\xi}{\partial x^2}\Delta x. \qquad (1.34)$$

(Относительное удлинение $\partial\xi/\partial x$ при упругих деформациях бывает много меньше единицы. Поэтому $\Delta\xi \ll \Delta x$, так что слагаемым $\Delta\xi$ в сумме $\Delta x + \Delta\xi$ можно пренебречь.)

Подставив найденные значения массы, ускорения и силы в уравнение второго закона Ньютона, получим

$$\rho S\Delta x \frac{\partial^2\xi}{\partial t^2} = SE\frac{\partial^2\xi}{\partial x^2}\Delta x.$$

Наконец, сократив на $ES\Delta x$, придем к уравнению

$$\frac{\partial^2\xi}{\partial x^2} = \frac{\rho}{E}\frac{\partial^2\xi}{\partial t^2}, \tag{1.35}$$

которое представляет собой волновое уравнение, написанное для случая, когда ξ не зависит от y и z. Сопоставление уравнений (1.29) и (1.35) показывает, что

$$v = \sqrt{E/\rho}. \tag{1.36}$$

Таким образом, фазовая скорость продольных упругих волн равна корню квадратному из модуля Юнга, деленного на плотность среды.

Аналогичные вычисления для поперечных волн приводят к выражению

$$v = \sqrt{G/\rho}, \tag{1.37}$$

где G — модуль сдвига.

1.6. Энергия упругой волны

Пусть в некоторой среде распространяется в направлении оси x плоская продольная волна

$$\xi = a\cos(\omega t - kx + \alpha). \tag{1.38}$$

Выделим в среде элементарный объем ΔV, настолько малый, чтобы скорость движения и деформацию во всех точках этого объема можно было считать одинаковыми и равными соответственно $\partial\xi/\partial t$ и $\partial\xi/\partial x$.

Выделенный нами объем обладает кинетической энергией

$$\Delta W_{\text{к}} = \frac{\rho}{2}\left(\frac{\partial\xi}{\partial t}\right)^2 \Delta V \tag{1.39}$$

($\rho\Delta V$ — масса объема, $\partial\xi/\partial t$ — его скорость).

Согласно формуле (3.81) кн. 1 рассматриваемый объем обладает также потенциальной энергией упругой деформации

$$\Delta W_{\text{п}} = \frac{E\varepsilon^2}{2}\Delta V = \frac{E}{2}\left(\frac{\partial\xi}{\partial x}\right)^2 \Delta V$$

($\varepsilon = \partial\xi/\partial x$ — относительное удлинение цилиндра, E — модуль Юнга среды). Заменим в соответствии с (1.36) модуль Юнга на ρv^2 (ρ — плотность среды, v — фазовая скорость волны). Тогда выражение для потенциальной энергии объема ΔV примет вид

$$\Delta W_{\text{п}} = \frac{\rho v^2}{2}\left(\frac{\partial\xi}{\partial x}\right)^2 \Delta V. \tag{1.40}$$

Выражения (1.39) и (1.40) в сумме дают полную энергию

$$\Delta W = \Delta W_{\text{к}} + \Delta W_{\text{п}} = \frac{1}{2}\rho\left[\left(\frac{\partial\xi}{\partial t}\right)^2 + v^2\left(\frac{\partial\xi}{\partial x}\right)^2\right]\Delta V.$$

Разделив эту энергию на объем ΔV, в котором она содержится, получим плотность энергии

$$w = \frac{1}{2}\rho\left[\left(\frac{\partial\xi}{\partial t}\right)^2 + v^2\left(\frac{\partial\xi}{\partial x}\right)^2\right]. \tag{1.41}$$

Дифференцирование уравнения (1.38) один раз по t, другой раз по x дает

$$\frac{\partial\xi}{\partial t} = -a\omega\sin(\omega t - kx + \alpha), \qquad \frac{\partial\xi}{\partial x} = ka\sin(\omega t - kx + \alpha).$$

Подставив эти выражения в формулу (1.41) и приняв во внимание, что $k^2v^2 = \omega^2$, получим

$$w = \rho a^2\omega^2\sin^2(\omega t - kx + \alpha). \tag{1.42}$$

В случае поперечной волны для плотности энергии получается такое же выражение.

Из (1.42) следует, что плотность энергии в каждый момент времени в разных точках пространства различна. В одной и той же точке плотность энергии изменяется со временем по закону квадрата синуса. Среднее значение квадрата синуса равно 1/2. Соответственно среднее по времени значение плотности энергии в каждой точке среды равно

$$\langle w\rangle = \frac{1}{2}\rho a^2\omega^2. \tag{1.43}$$

Плотность энергии (1.42) и ее среднее значение (1.43) пропорциональны плотности среды ρ, квадрату частоты ω и квадрату амплитуды волны a. Подобная зависимость имеет место не только для незатухающей плоской волны, но и для других видов волн (плоской затухающей, сферической и т. д.).

Итак, среда, в которой распространяется волна, обладает дополнительным запасом энергии. Эта энергия доставляется от источника колебаний в различные точки среды самой волной; следовательно, волна переносит с собой энергию. Количество энергии, переносимое волной через некоторую поверхность в единицу времени, называется *потоком энергии* через эту поверхность. Если через данную поверхность переносится за время dt энергия dW, то поток энергии Φ равен

$$\Phi = \frac{dW}{dt}. \tag{1.44}$$

Поток энергии — скалярная величина, размерность которой равна размерности энергии, деленной на размерность времени, т. е. совпадает с размерностью мощности. В соответствии с этим Φ измеряется в ваттах, эргах в секунду и т. п.

Поток энергии в разных точках среды может быть различной интенсивности. Для характеристики течения энергии в разных точках пространства вводится векторная величина, называемая *плотностью потока энергии*. Эта величина численно равна потоку энергии через единичную площадку, помещенную в данной точке перпендикулярно к направлению, в котором переносится энергия. Направление вектора плотности потока энергии совпадает с направлением переноса энергии.

Пусть через площадку $\Delta S_\perp$, перпендикулярную к направлению распространения волны, переносится за время Δt энергия ΔW. Тогда плотность потока энергии равна

$$j = \frac{\Delta\Phi}{\Delta S_\perp} = \frac{\Delta W}{\Delta S_\perp \Delta t} \tag{1.45}$$

(см. (1.44)). Через площадку $\Delta S_\perp$ (рис. 1.9) будет перенесена за время Δt энергия ΔW, заключенная в объеме цилиндра с основанием $\Delta S_\perp$ и высотой $v\Delta t$ (v — фазовая скорость волны). Если размеры цилиндра достаточно малы (за счет малости $\Delta S_\perp$ и Δt) для того, чтобы плотность энергии во всех точках цилиндра можно было

считать одинаковой, то ΔW можно найти как произведение плотности энергии w на объем цилиндра, равный $\Delta S_{\perp} v \Delta t$:

$$\Delta W = w \Delta S_{\perp} v \Delta t.$$

Подставив это выражение в формулу (1.45), получим для плотности потока энергии

$$j = wv. \tag{1.46}$$

Наконец, введя вектор **v**, модуль которого равен фазовой скорости волны, а направление совпадает с направлением распространения волны (и переноса энергии), можно написать

$$\mathbf{j} = w\mathbf{v}. \tag{1.47}$$

Мы получили выражение для вектора плотности потока энергии. Этот вектор был введен в рассмотрение Умовым[1]) и называется *вектором Умова*. Вектор (1.47),

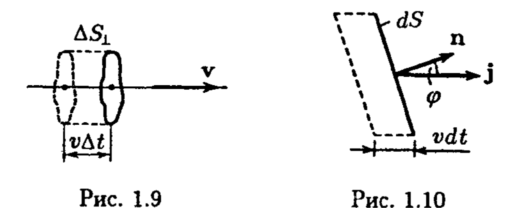


Рис. 1.9 Рис. 1.10

как и плотность энергии E, различен в разных точках пространства, а в данной точке изменяется со временем по закону квадрата синуса. Его среднее значение равно

$$\langle \mathbf{j} \rangle = \langle w \rangle \mathbf{v} = \frac{1}{2}\rho a^2 \omega^2 \mathbf{v} \tag{1.48}$$

(см. (1.43)). Выражение (1.48), так же как и (1.43), справедливо для волны любого вида (сферической, затухающей и т. д.).

Отметим, что, когда говорят об *интенсивности* волны в данной точке, имеют в виду модуль среднего по времени значения плотности потока энергии, переносимого волной.

Зная **j** во всех точках произвольной поверхности S, можно вычислить поток энергии через эту поверхность. С этой целью разобьем поверхность на элементарные участ-

---

[1]) Николай Алексеевич Умов (1846–1915) — русский физик.

ки dS. За время dt через площадку dS пройдет энергия dW, заключенная в изображенном на рис. 1.10 косом цилиндре. Объем этого цилиндра равен $dV = v\,dt\,dS\cos\varphi$. В нем содержится энергия $dW = w\,dV = wv\,dt\,dS\cos\varphi$ (w — мгновенное значение плотности энергии в том месте, где расположена площадка dS). Приняв во внимание, что

$$wv\,dS\cos\varphi = j\,dS\cos\varphi = \mathbf{j}\,d\mathbf{S}$$

($d\mathbf{S} = \mathbf{n}\,dS$; см. рис. 1.10), можно написать $dW = \mathbf{j}\,d\mathbf{S}\,dt$. Отсюда для потока энергии $d\Phi$ через площадку dS получается формула

$$d\Phi = \frac{dW}{dt} = \mathbf{j}\,d\mathbf{S} \qquad (1.49)$$

(ср. с формулой (1.71) кн. 2). Полный поток энергии через поверхность равен сумме элементарных потоков (1.49):

$$\Phi = \int_S \mathbf{j}\,d\mathbf{S}. \qquad (1.50)$$

В соответствии с (1.73) кн. 2 можно сказать, что поток энергии равен потоку вектора $\mathbf{j}$ через поверхность S.

Заменив в формуле (1.50) вектор $\mathbf{j}$ его средним по времени значением, получим среднее значение Φ:

$$\langle\Phi\rangle = \int_S \langle\mathbf{j}\rangle\,d\mathbf{S}. \qquad (1.51)$$

Вычислим среднее значение потока энергии через произвольную волновую поверхность незатухающей сферической волны. В каждой точке этой поверхности векторы $\mathbf{j}$ и $d\mathbf{S}$ совпадают по направлению. Кроме того, модуль вектора $\mathbf{j}$ для всех точек поверхности одинаков. Следовательно,

$$\langle\Phi\rangle = \oint_S \langle\mathbf{j}\rangle d\mathbf{S} = \langle j\rangle S = \langle j\rangle\cdot 4\pi r^2.$$

(r — радиус волновой поверхности). Согласно (1.48) $\langle j\rangle = \rho a^2\omega^2 v/2$. Таким образом,

$$\langle\Phi\rangle = 2\pi\rho\omega^2 v a_r^2 r^2$$

(a_r — амплитуда волны на расстоянии r от источника). Поскольку энергия волны не поглощается средой, средний

поток энергии через сферу любого радиуса должен иметь одинаковое значение, т. е. должно выполняться условие

$$a_r^2 r^2 = \text{const}.$$

Отсюда следует, что амплитуда a_r незатухающей сферической волны обратно пропорциональна расстоянию r от источника волны (см. формулу (1.12)). Соответственно средняя плотность потока энергии $\langle j \rangle$ обратно пропорциональна квадрату расстояния от источника.

В случае плоской затухающей волны амплитуда убывает с расстоянием по закону $a = a_0 \exp(-\gamma x)$ (см. (1.11)). Соответственно средняя плотность потока энергии (т. е. интенсивность волны) убывает по закону

$$j = j_0 \exp(-\kappa x). \tag{1.52}$$

Здесь $\kappa = 2\gamma$ — величина, называемая коэффициентом поглощения волны. Она имеет размерность, обратную размерности длины. Легко сообразить, что величина, обратная κ, равна расстоянию, на котором интенсивность волны уменьшается в e раз.

1.7. Стоячие волны

Если в среде распространяется одновременно несколько волн, то колебания частиц среды оказываются геометрической суммой колебаний, которые совершали бы частицы при распространении каждой из волн в отдельности. Следовательно, волны просто накладываются одна на другую, не возмущая друг друга. Это утверждение называется принципом суперпозиции (наложения) волн.

В случае, когда колебания, обусловленные отдельными волнами в каждой из точек среды, обладают постоянной разностью фаз, волны называются когерентными. Более строгое определение когерентности будет дано в § 4.2). При сложении когерентных волн возникает явление интерференции, заключающееся в том, что колебания в одних точках усиливают, а в других точках ослабляют друг друга.

Очень важный случай интерференции наблюдается при наложении двух встречных плоских волн с одинаковой амплитудой. Возникающий в результате колебательный процесс называется стоячей волной. Практически стоячие волны возникают при отражении волн от преград.

Падающая на преграду волна и бегущая ей навстречу отраженная волна, налагаясь друг на друга, дают стоячую волну.

Напишем уравнения двух плоских волн, распространяющихся вдоль оси x в противоположных направлениях:

$$\xi_1 = a\cos(\omega t - kx + \alpha_1), \quad \xi_2 = a\cos(\omega t + kx + \alpha_2).$$

Сложив вместе эти уравнения и преобразовав результат по формуле для суммы косинусов, получим

$$\xi = \xi_1 + \xi_2 = 2a\cos\left(kx + \frac{\alpha_2 - \alpha_1}{2}\right)\cos\left(\omega t + \frac{\alpha_1 + \alpha_2}{2}\right). \tag{1.53}$$

Уравнение (1.53) есть уравнение стоячей волны. Чтобы упростить его, выберем начало отсчета x так, чтобы разность $\alpha_2 - \alpha_1$ стала равной нулю, а начало отсчета t — так, чтобы оказалась равной нулю сумма $\alpha_1 + \alpha_2$. Кроме того, заменим волновое число k его значением $2\pi/\lambda$. Тогда уравнение (1.53) примет вид

$$\xi = 2a\cos\left(2\pi\frac{x}{\lambda}\right)\cos\omega t. \tag{1.54}$$

Из (1.54) видно, что в каждой точке стоячей волны происходят колебания той же частоты, что и у встречных волн, причем амплитуда зависит от x:

$$\text{амплитуда} = \left|2a\cos\left(2\pi\frac{x}{\lambda}\right)\right|.$$

В точках, координаты которых удовлетворяют условию

$$2\pi\frac{x}{\lambda} = \pm n\pi \quad (n = 0, 1, 2, \ldots), \tag{1.55}$$

амплитуда колебаний достигает максимального значения. Эти точки называются пучностями стоячей волны. Из (1.55) получаются значения координат пучностей:

$$x_{\text{пучн}} = \pm n\frac{\lambda}{2} \quad (n = 0, 1, 2, \ldots). \tag{1.56}$$

Следует иметь в виду, что пучность представляет собой не одну единственную точку, а плоскость, точки которой имеют значения координаты x, определяемые формулой (1.56).

В точках, координаты которых удовлетворяют условию

$$2\pi\frac{x}{\lambda} = \pm\left(n + \frac{1}{2}\right)\pi \quad (n = 0, 1, 2, \ldots),$$

амплитуда колебаний обращается в нуль. Эти точки называются узлами стоячей волны. Точки среды, находящиеся в узлах, колебаний не совершают. Координаты узлов имеют значения

$$x_{\text{узл}} = \pm\left(n+\frac{1}{2}\right)\frac{\lambda}{2} \quad (n = 0, 1, 2, \ldots). \tag{1.57}$$

Узел, как и пучность, представляет собой не одну точку, а плоскость, точки которой имеют значения координаты x, определяемые формулой (1.57).

Из формул (1.56) и (1.57) следует, что расстояние между соседними пучностями, так же как и расстояние между соседними узлами, равно $\lambda/2$. Пучности и узлы сдвинуты относительно друг друга на четверть длины волны.

Обратимся снова к уравнению (1.54). Множитель $2a\cos(2\pi x/\lambda)$ при переходе через нулевое значение меняет знак. В соответствии с этим фаза колебаний по разные стороны от узла различается на π. Это означает, что точки, лежащие по разные стороны от узла, колеблются в противофазе. Все точки, заключенные между двумя соседними узлами, колеблются синфазно (т. е. в одинаковой фазе). На рис. 1.11 дан ряд «моментальных фотографий» отклонений точек от положения равновесия. Первая «фотография» соответствует моменту, когда отклонения достигают наибольшего абсолютного значения. Последующие «фотографии» сделаны с интервалами в четверть периода. Стрелками показаны скорости частиц.

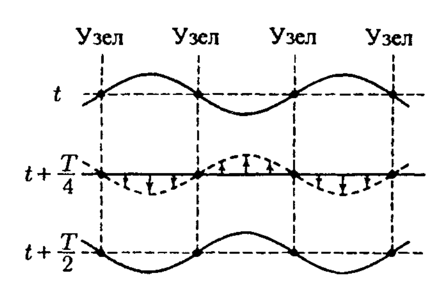


Рис. 1.11

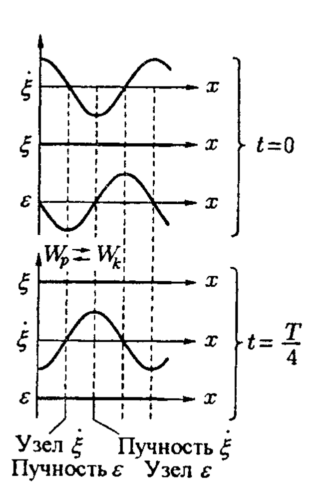


Рис. 1.12

Продифференцировав уравнение (1.54) один раз по t, а другой раз по x, найдем выражения для скорости частиц $\dot{\xi}$ и для деформации среды ε:

$$\dot{\xi} = \frac{\partial \xi}{\partial t} = -2\omega a \cos\left(2\pi \frac{x}{\lambda}\right) \sin \omega t, \tag{1.58}$$

$$\varepsilon = \frac{\partial \xi}{\partial x} = -2\frac{2\pi}{\lambda} a \sin\left(2\pi \frac{x}{\lambda}\right) \cos \omega t. \tag{1.59}$$

Уравнение (1.58) описывает стоячую волну скорости, а уравнение (1.59) — стоячую волну деформации.

На рис. 1.12 сопоставлены «моментальные фотографии» смещения, скорости и деформации для моментов времени 0 и $T/4$. Из графиков видно, что узлы и пучности скорости совпадают с узлами и пучностями смещения; узлы же и пучности деформации совпадают соответственно с пучностями и узлами смещения. В то время как ξ и ε достигают максимальных значений, $\dot{\xi}$ обращается в нуль, и наоборот. Соответственно дважды за период происходит превращение энергии стоячей волны то полностью в потенциальную, сосредоточенную в основном вблизи узлов волны (где находятся пучности деформации), то полностью в кинетическую, сосредоточенную в основном вблизи пучностей волны (где находятся пучности скорости). В результате происходит переход энергии от каждого узла к соседним с ним пучностям и обратно. Средний по времени поток энергии в любом сечении волны равен нулю.

1.8. Колебания струны

В закрепленной с обоих концов натянутой струне при возбуждении поперечных колебаний устанавливаются стоячие волны, причем в местах закрепления струны должны располагаться узлы. Поэтому в струне возбуждаются с заметной интенсивностью только такие колебания, половина длины волны которых укладывается на длине струны целое число раз (рис. 1.13). Отсюда вытекает условие

$$l = n\frac{\lambda}{2} \quad \text{или} \quad \lambda_n = \frac{2l}{n} \quad (n = 1, 2, 3, \ldots) \tag{1.60}$$

(l — длина струны). Длинам волн (1.60) соответствуют частоты

$$\nu_n = \frac{v}{\lambda_n} = \frac{v}{2l} n \quad (n = 1, 2, 3, \ldots) \tag{1.61}$$

(v — фазовая скорость волны, определяемая силой натяжения струны и массой единицы длины, т. е. линейной плотностью струны). Частоты ν_n называются **собственными частотами** струны. Собственные частоты являются кратными частоте

$$\nu_1 = v/2l,$$

которая называется основной частотой. Гармонические колебания с частотами (1.61) называются **собственными** или **нормальными колебаниями**. Их называют также **гармониками**. В общем случае колебание струны представляет собой наложение различных гармоник.

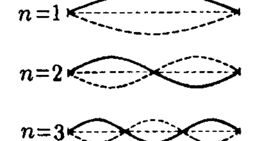


Рис. 1.13

Колебания струны примечательны в том отношении, что для них по классическим представлениям получаются дискретные значения одной из характеризующих колебания величин (частоты). Для классической физики такая дискретность является исключением. Для квантовых процессов дискретность является скорее правилом, чем исключением.

1.9. Звук

Если упругие волны, распространяющиеся в воздухе, имеют частоту в пределах от 16 до 20 000 Гц, то, достигнув человеческого уха, они вызывают ощущение звука. В соответствии с этим упругие волны в любой среде, имеющие частоту, заключенную в указанных пределах, называют **звуковыми волнами** или просто **звуком**. Упругие волны с частотами, меньшими 16 Гц, называют **инфразвуком**; волны с частотами, превышающими частоту 20 000 Гц, называют **ультразвуком**. Инфра- и ультразвуки человеческое ухо не воспринимает.

Воспринимаемые звуки люди различают по **высоте**, **тембру** и **громкости**. Каждой из этих субъективных оценок соответствует определенная физическая характеристика звуковой волны.

Всякий реальный звук представляет собой не простое гармоническое колебание, а является наложением гармонических колебаний с определенным набором частот. Набор частот колебаний, присутствующих в данном звуке,

называется его **акустическим спектром**. Если в звуке присутствуют колебания всех частот в некотором интервале от ν' до ν'', то спектр называется **сплошным**. Если звук состоит из колебаний дискретных частот ν_1, ν_2, ν_3 и т. д., то спектр называется **линейчатым**. Сплошным акустическим спектром обладают шумы. Колебания с линейчатым спектром вызывают ощущение звука с более или менее определенной высотой. Такой звук называется **тональным**.

Высота тонального звука определяется основной (наименьшей) частотой. Относительная интенсивность **обертонов** (т. е. колебаний с частотами ν_2, ν_3 и т. д.) определяет окраску, или тембр, звука. Различный спектральный состав звуков, возбуждаемых разными музыкальными инструментами, позволяет отличить на слух, например, флейту от скрипки или рояля. Под **интенсивностью** звука понимают среднее по времени значение плотности потока энергии, которую несет с собой звуковая волна. Для того, чтобы вызвать звуковое ощущение, волна должна обладать некоторой минимальной интенсивностью, которая называется **порогом слышимости**. Порог слышимости несколько различен для разных лиц и сильно зависит от частоты звука. Наиболее чувствительно человеческое ухо к частотам от 1000 до 4000 Гц. В этой области частот порог слышимости составляет в среднем около 10^{-12} Вт/м^2. При других частотах порог слышимости лежит выше (рис. 1.14).

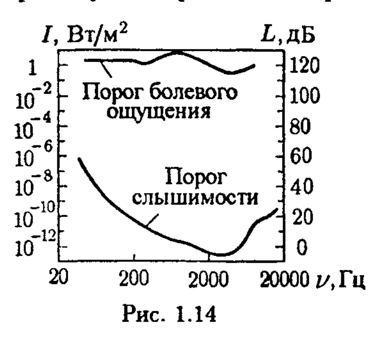


Рис. 1.14

При интенсивностях порядка 1 – 10 Вт/м^2 волна перестает восприниматься как звук, вызывая в ухе лишь ощущение боли и давления. Значение интенсивности, при котором это происходит, называется **порогом болевого ощущения**. Порог болевого ощущения, так же как и порог слышимости, зависит от частоты (рис. 1.14).

Субъективно оцениваемая громкость звука возрастает гораздо медленнее, чем интенсивность звуковых волн. При возрастании интенсивности в геометрической прогрессии громкость возрастает приблизительно в арифметической прогрессии, т. е. линейно. На этом основа-

нии уровень громкости L определяется как логарифм отношения интенсивности данного звука I к интенсивности I_0, принятой за исходную:

$$L = \lg \frac{I}{I_0}. \qquad (1.62)$$

Исходная интенсивность I_0 принимается равной 10^{-12} Вт/м^2, так что порог слышимости при частоте порядка 10^3 Гц лежит на нулевом уровне ($L = 0$).

Единица уровня громкости L, определяемого формулой (1.62), называется белом (Б)[2]. Обычно пользуются в 10 раз меньшими единицами — децибелами (дБ). Значение L в децибелах определяется формулой

$$L = 10 \lg \frac{I}{I_0}. \qquad (1.63)$$

Отношение двух интенсивностей I_1 и I_2 также может быть выражено в децибелах:

$$L_{12} = 10 \lg \frac{I_1}{I_2}. \qquad (1.64)$$

С помощью этой формулы может быть выражено в децибелах уменьшение интенсивности (затухание) волны на некотором пути. Так, например, затухание в 20 дБ означает, что интенсивность уменьшается в 100 раз.

Весь диапазон интенсивностей, при которых волна вызывает в человеческом ухе звуковое ощущение (от 10^{-12} до 10 Вт/м^2), соответствует значениям уровня громкости от 0 до 130 дБ. В табл. 1.1 приведены ориентировочные значения уровня громкости для некоторых звуков.

Энергия, которую несут с собой звуковые волны, крайне мала. Если, например, предположить, что стакан с водой полностью поглощает всю падающую на него энергию звуковой волны с уровнем громкости 70 дБ (в этом случае количество поглощаемой в одну секунду энергии будет составлять примерно $2 \cdot 10^{-7}$ Вт), то для того, чтобы нагреть воду от комнатной температуры до кипения, потребуется время порядка десяти тысяч лет. Ультразвуковые волны могут быть получены в виде направленных пучков, подобных пучкам света. Направленные ультразвуковые пучки

[2]) Александр Грейам Белл (1847–1922) — один из изобретателей телефона. По национальности шотландец, с 1871 г. жил в США.

Таблица 1.1

Звук	Уровень громкости, дБ
Тикание часов	20
Шепот на расстоянии 1 м	20
Тихий разговор	40
Речь средней громкости	60
Громкая речь	70
Крик	80
Шум самолетного мотора : на расстоянии 5 м	120
на расстоянии 3 м	130

нашли широкое применение для целей локации (обнаружения предметов и определения расстояния до них) в воде. Впервые идея ультразвуковой локации была высказана П. Ланжевеном и разработана им во время первой мировой войны для обнаружения подводных лодок. В настоящее время ультразвуковые локаторы используются для обнаружения айсбергов, косяков рыбы и т. п.

Известно, что, крикнув и определив время до прихода эха, т. е. звука, отраженного от препятствия — скалы, леса, поверхности воды в колодце и т. д., — можно, умножив половину этого времени на скорость звука, найти расстояние до препятствия. На этом принципе устроен упомянутый выше локатор, а также ультразвуковой эхолот, который применяется для измерения глубины и снятия рельефа морского дна.

Метод ультразвуковой локации позволяет летучей мыши хорошо ориентироваться при полете в темноте. Летучая мышь периодически испускает импульсы ультразвуковой частоты и по воспринимаемым с помощью органа слуха отраженным сигналам с большой точностью судит о расстояниях до окружающих ее предметов.

1.10. Скорость звука в газах

Звуковая волна в газе представляет собой распространяющуюся в пространстве последовательность чередующихся областей сжатия и разрежения газа. Следовательно,

давление в каждой точке пространства испытывает периодически изменяющееся отклонение Δp от среднего значения p, совпадающего с давлением, которое существует в газе в отсутствие волн. Таким образом, мгновенное значение давления в некоторой точке пространства можно представить в виде

$$p' = p + \Delta p.$$

Пусть волна распространяется вдоль оси x. Подобно тому, как мы поступили в § 1.5 при нахождении скорости упругих волн в твердой среде, рассмотрим объем газа в виде цилиндра с площадью основания S и высотой Δx (рис. 1.15). Масса газа, заключенного в этом объеме, равна $\rho S \Delta x$, где ρ — плотность невозмущенного волной газа. Ввиду малости Δx проекцию ускорения на ось x для всех точек цилиндра можно считать одинаковой и равной $\partial^2 \xi / \partial t^2$.

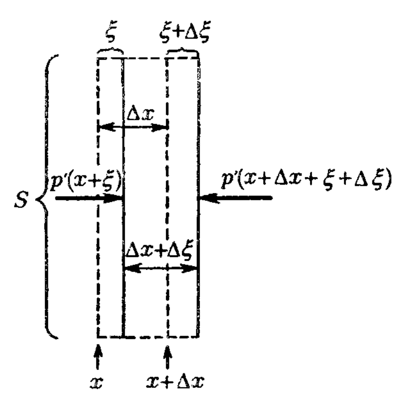


Рис. 1.15

Для нахождения проекции на ось x силы, действующей на рассматриваемый объем, нужно взять произведение площади основания цилиндра S на разность давлений в сечениях $x + \xi$ и $x + \Delta x + \xi + \Delta \xi$. Повторив рассуждения, приведшие нас к формуле (1.34), получим

$$F_x = -\frac{\partial p'}{\partial x} S \Delta x$$

(напомним, что при выводе формулы (1.34) было использовано предположение $|\Delta \xi| \ll |\Delta x|$).

Итак, мы нашли массу выделенного объема газа, его ускорение и действующую на него силу. Теперь напишем для этого объема газа уравнение второго закона Ньютона:

$$\rho S \Delta x \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = -\frac{\partial p'}{\partial x} S \Delta x.$$

После сокращения на $S\Delta x$ получим

$$\rho \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = -\frac{\partial p'}{\partial x}. \qquad (1.65)$$

В полученном нами дифференциальном уравнении содержатся две неизвестные функции: ξ и p'. Выразим одну из этих функций через другую. Для этого найдем связь между давлением газа p' и относительным изменением его объема $\partial\xi/\partial x$. Эта связь зависит от характера процесса сжатия (или расширения) газа. В звуковой волне сжатия и расширения газа следуют друг за другом так часто, что смежные участки среды не успевают обмениваться теплом, и процесс можно считать адиабатическим. При адиабатическом процессе связь между давлением и объемом данной массы газа дается уравнением

$$pV^\gamma = \text{const}, \tag{1.66}$$

где γ — отношение теплоемкости газа при постоянном давлении к теплоемкости при постоянном объеме (см. уравнение (1.44) кн. 3). В соответствии с (1.66)

$$p(S\Delta x)^\gamma = p'[S(\Delta x + \Delta\xi)]^\gamma =$$
$$= p'\left[S\left(\Delta x + \frac{\partial\xi}{\partial x}\Delta x\right)\right]^\gamma = p'(S\Delta x)^\gamma\left(1 + \frac{\partial\xi}{\partial x}\right)^\gamma.$$

Сокращение на $(S\Delta x)^\gamma$ дает

$$p = p'\left(1 + \frac{\partial\xi}{\partial x}\right)^\gamma.$$

Воспользовавшись тем, что по предположению $|\partial\xi/\partial x| \ll \ll 1$, разложим выражение $(1+\partial\xi/\partial x)^\gamma$ в ряд по степеням $\partial\xi/\partial x$ и пренебрежем членами высших порядков малости. В результате получится формула

$$p = p'(1 + \gamma\frac{\partial\xi}{\partial x}).$$

Решим это уравнение относительно p':

$$p' = \frac{p}{1 + \gamma\partial\xi/\partial x} \approx p(1 - \gamma\frac{\partial\xi}{\partial x}) \tag{1.67}$$

(мы воспользовались формулой $(1 + x)^{-1} \approx 1 - x$, справедливой для $|x| \ll 1$). Из найденного нами соотношения легко получить выражение для Δp:

$$\Delta p = p' - p = -\gamma p\frac{\partial\xi}{\partial x}. \tag{1.68}$$

Поскольку γ — величина порядка единицы, из (1.68) вытекает, что $|\partial\xi/\partial x| \approx |\Delta p/p|$. Таким образом, условие $\partial\xi/\partial x \ll 1$ означает, что отклонение давления от среднего значения много меньше самого давления. Это действительно так: для самых громких звуков амплитуда колебаний давления воздуха не превышает 1 мм рт. ст., в то время как атмосферное давление p имеет величину порядка 10^3 мм рт. ст.

Продифференцировав выражение (1.67) по x, найдем, что

$$\frac{\partial p'}{\partial x} = -\gamma p \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2}.$$

Наконец, подставив это значение $\partial p'/\partial x$ в формулу (1.65), получим дифференциальное уравнение

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} = \frac{\rho}{\gamma p} \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2}.$$

Сопоставление его с волновым уравнением (1.29) дает для скорости звуковых волн в газе выражение

$$v = \sqrt{\gamma \frac{p}{\rho}} \qquad (1.69)$$

(напомним, что p и ρ — давление и плотность невозмущенного волной газа).

При атмосферном давлении и обычных температурах большинство газов близки по своим свойствам к идеальному газу. Поэтому отношение p/ρ для них можно положить равным RT/M, где R — газовая постоянная, T — термодинамическая температура M — масса одного моля газа (см. формулу (1.23) кн. 3). Подставив это значение в (1.69), получим для скорости звука в газе формулу

$$v = \sqrt{\gamma RT/M}. \qquad (1.70)$$

Из этой формулы следует, что скорость звука пропорциональна корню квадратному из температуры и не зависит от давления.

Средняя скорость теплового движения молекул газа определяется по формуле

$$v_{\text{мол}} = \sqrt{8RT/\pi M}$$

(см. формулу (2.70) кн. 3). Сравнение этого выражения с (1.70) показывает, что скорость звука в газе связана со средней скоростью теплового движения молекул соотношением

$$v = \langle v_{\text{мол}} \rangle \sqrt{\gamma\pi/8}. \tag{1.71}$$

Подстановка значения γ для воздуха, равного 1,4, приводит к соотношению $v \approx (3/4)\langle v_{\text{мол}} \rangle$. Максимальное возможное значение γ составляет 5/3. В этом случае $v \approx$ $\approx (4/5)\langle v_{\text{мол}} \rangle$. Таким образом, скорость звука в газе оказывается того же порядка, что и средняя скорость теплового движения молекул, но всегда несколько меньше, чем $\langle v_{\text{мол}} \rangle$.

Вычислим значение скорости звука в воздухе при температуре 290 К (комнатная температура). Для воздуха $\gamma = 1,40$, $M = 29 \cdot 10^{-3}$ кг/моль. Газовая постоянная равна 8,31 Дж/(моль·К). Подставив эти значения в формулу (1.70), получим

$$v = \sqrt{\frac{\gamma RT}{M}} = \sqrt{\frac{1,40 \cdot 8,31 \cdot 290}{29 \cdot 10^{-3}}} = 340 \text{ м/с}.$$

Найденное нами значение скорости звука в воздухе хорошо согласуется со значением, полученным опытным путем.

Найдем связь между интенсивностью звуковой волны I и амплитудой колебаний давления $(\Delta p)_m$. В § 1.9 было указано, что под интенсивностью звука понимают среднее значение плотности потока энергии. Следовательно,

$$I = \frac{1}{2}\rho a^2 \omega^2 v \tag{1.72}$$

(см. формулу (2.50) кн. 3). Здесь ρ — плотность невозмущенного газа, a — амплитуда колебаний частиц среды, т. е. амплитуды колебаний смещения ξ, ω — частота, v — фазовая скорость волны. Заметим, что под частицами среды в данном случае подразумеваются не молекулы, а макроскопические (т. е. заключающиеся в себе большое число молекул) объемы, линейные размеры которых много меньше длины волны.

Пусть ξ изменяется по закону $\xi = a\cos(\omega t - kx + \alpha)$. Тогда

$$\frac{\partial \xi}{\partial x} = ak\sin(\omega t - kx + \alpha) = a\frac{\omega}{v}\sin(\omega t - kx + \alpha).$$

Подставив это значение в формулу (1.68), получим

$$\Delta p = -\gamma p a \frac{\omega}{v} \sin(\omega t - kx + \alpha) = -(\Delta p)_m \sin(\omega t - kx + \alpha).$$

Отсюда

$$a = \frac{(\Delta p)_m v}{\gamma p \omega}. \qquad (1.73)$$

Подстановка этого выражения в (1.72) дает

$$I = \frac{1}{2} \rho \frac{(\Delta p)_m^2 v^2}{\gamma^2 p^2 \omega^2} \omega^2 v = \frac{(\Delta p)_m^2}{2\gamma^2 \rho v} \left(\frac{\rho}{p}\right)^2 v^4.$$

Приняв во внимание, что $v^4 = (\gamma RT/M)^2$, а $(p/\rho)^2 = (RT/M)^2$ (см. формулу (1.70) и предшествующий ей текст), можно написать

$$I = \frac{(\Delta p)_m^2}{2\rho v}. \qquad (1.74)$$

С помощью этой формулы можно вычислить, что диапазону уровней громкости от 0 до 130 дБ соответствуют примерные значения амплитуды колебаний давления воздуха от $3 \cdot 10^{-5}$ Па ($2 \cdot 10^{-7}$ мм рт. ст.) до 100 Па (≈ 1 мм рт. ст.).

Произведем оценку амплитуды колебаний частиц a и амплитуды скорости частиц $(\dot{\xi})_m$. Начнем с оценки величины a, определяемой формулой (1.73). Приняв во внимание, что $v/\omega = \lambda/2\pi$, получим соотношение

$$\frac{a}{\lambda} = \frac{1}{2\pi\gamma} \frac{(\Delta p)_m}{p} \approx 0,1 \frac{(\Delta p)_m}{p} \qquad (1.75)$$

($\gamma \approx 1,5$, следовательно, $2\pi\gamma \approx 10$). При громкости, равной 130 дБ отношение $(\Delta p)_m/p$ порядка 10^{-3}, при громкости 60 дБ это отношение равно примерно $2 \cdot 10^{-7}$. Длины звуковых волн в воздухе лежат в пределах от 21 м (при $\nu = 16$ Гц) до 17 мм (при $\nu = 20000$ Гц). Подставив эти данные в формулу (1.75), найдем, что при громкости 60 дБ амплитуда колебаний частиц составляет $\approx 4 \cdot 10^{-4}$ мм для самых длинных волн и $\approx 3 \cdot 10^{-7}$ мм для самых коротких волн. При громкости 130 дБ амплитуда колебаний для самых длинных волн достигает ≈ 2 мм.

При гармонических колебаниях амплитуда скорости $(\dot{\xi})_m$ равна амплитуде смещения a, умноженной на круговую частоту ω: $(\dot{\xi})_m = a\omega$. Умножив выражение (1.75) на ω, получим

$$\frac{(\dot{\xi})_m}{v} = \frac{1}{\gamma}\frac{(\Delta p)_m}{p} \approx \frac{(\Delta p)_m}{p}. \qquad (1.76)$$

Следовательно, при громкости 130 дБ амплитуда скорости составляет примерно 340 м/с $\cdot\, 10^{-3} = 0,34$ м/с, при громкости 60 дБ амплитуда будет порядка 0,1 мм/с. Заметим, что, в отличие от амплитуды смещения, амплитуда скорости не зависит от длины волны.

1.11. Эффект Доплера для звуковых волн

Пусть в газе или жидкости на некотором расстоянии от источника волн располагается воспринимающее колебания среды устройство, которое мы будем называть приемником. Если источник и приемник волн неподвижны относительно среды, в которой распространяется волна, то частота колебаний, воспринимаемых приемником, будет равна частоте ν_0 колебаний источника. Если же источник или приемник либо оба они движутся относительно среды, то частота ν, воспринимаемая приемником, может оказаться отличной от ν_0. Это явление называется *эффектом Доплера*[3].

Предположим, что источник и приемник движутся вдоль соединяющей их прямой. Скорость источника $v_{\text{ист}}$ будем считать положительной, если источник движется по направлению к приемнику, и отрицательной, если источник движется в направлении от приемника. Аналогично скорость приемника $v_{\text{пр}}$ будем считать положительной, если приемник движется по направлению к источнику, и отрицательной, если приемник движется в направлении от источника.

Если источник неподвижен и колеблется с частотой ν_0, то к моменту, когда источник будет завершать ν_0-е колебание, порожденный первым колебанием «гребень» волны успеет пройти в среде путь v (v — скорость распространения волны относительно среды). Следовательно, порождаемые источником за секунду ν_0 «гребней» и «впадин» вол-

[3]) Кристиан Доплер (1803–1853) — австрийский физик и астроном.

ны уложатся на длине v. Если же источник движется относительно среды со скоростью $v_{\text{ист}}$, то в момент, когда источник будет завершать ν_0-е колебание, «гребень», порожденный первым колебанием, будет находиться от источника на расстоянии $v - v_{\text{ист}}$ (рис. 1.16). Следовательно, ν_0 «гребней» и «впадин» волны уложатся на длине $v - v_{\text{ист}}$, так что длина волны будет равна

$$\lambda = \frac{(v - v_{\text{ист}})}{\nu_0}. \tag{1.77}$$

Мимо неподвижного приемника пройдут за секунду «гребни» и «впадины», укладывающиеся на длине v.

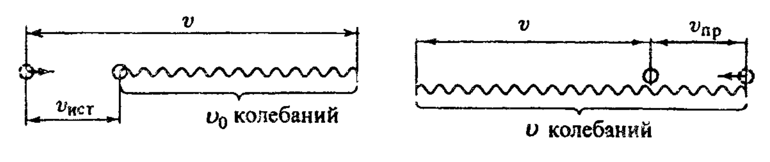


Рис. 1.16 Рис. 1.17

Если приемник движется со скоростью $v_{\text{пр}}$, то в конце длящегося 1 с промежутка времени он будет воспринимать «впадину», которая в начале этого промежутка отстояла от его теперешнего положения на расстояние, численно равное v. Таким образом, приемник воспримет за секунду колебания, отвечающие «гребням» и «впадинам», укладывающимся на длине, численно равной $v + v_{\text{пр}}$ (рис. 1.17), и будет колебаться с частотой

$$\nu = \frac{(v + v_{\text{пр}})}{\lambda}.$$

Подставив в эту формулу выражение (1.77) для λ, получим

$$\nu = \nu_0 \frac{v + v_{\text{пр}}}{v - v_{\text{ист}}}. \tag{1.78}$$

Из формулы (1.78) вытекает, что при таком движении источника и приемника, при котором расстояние между ними уменьшается, воспринимаемая приемником частота ν оказывается больше частоты источника ν_0. Если расстояние между источником и приемником увеличивается, ν будет меньше, чем ν_0.

Если направления скоростей $\mathbf{v}_{\text{ист}}$ и $\mathbf{v}_{\text{пр}}$ не совпадают с проходящей через источник и приемник прямой, вместо

$v_{\text{ист}}$ и $v_{\text{пр}}$ в формуле (1.78) нужно брать проекции векторов $\mathbf{v}_{\text{ист}}$ и $\mathbf{v}_{\text{пр}}$ на направление указанной прямой.

Из формулы (1.78) следует, что эффект Доплера для звуковых волн определяются скоростями движения источника и приемника относительно среды, в которой распространяется звук. Для световых волн также наблюдается эффект Доплера, однако формула для изменения частоты имеет иной вид, чем (1.78). Это обусловлено тем, что для световых волн не существует вещественной среды, колебания которой представляли бы собой «свет». Поэтому скорости источника и приемника света относительно «среды» не имеют смысла. В случае света можно говорить лишь об относительной скорости приемника и источника. Эффект Доплера для световых волн зависит от модуля и направления этой скорости. Эффект Доплера для световых волн рассматривается в § 8.4.

Глава 2

Электромагнитные волны

2.1. Волновое уравнение для электромагнитного поля

В гл. 9 кн. 2 мы выяснили, что переменное электрическое поле порождает магнитное, которое, вообще говоря, тоже оказывается переменным. Это переменное магнитное поле порождает электрическое и т. д. Таким образом, если возбудить с помощью колеблющихся зарядов переменное электромагнитное поле, то в окружающем заряды пространстве возникнет последовательность взаимных превращений электрического и магнитного полей, распространяющихся от точки к точке. Этот процесс будет периодическим во времени и в пространстве и, следовательно, представляет собой волну.

Покажем, что существование электромагнитных волн вытекает из уравнений Максвелла. В случае однородной нейтральной ($\rho = 0$) непроводящей ($\mathbf{j} = 0$) среды с постоянными проницаемостями ε и μ

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \mu\mu_0 \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t}, \quad \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} = \varepsilon\varepsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t},$$

$$\nabla\mathbf{B} = \mu\mu_0 \nabla\mathbf{H}, \quad \nabla\mathbf{D} = \varepsilon\varepsilon_0 \nabla\mathbf{E}.$$

Поэтому уравнения (9.17)–(9.20) кн. 2 можно написать следующим образом:

$$[\nabla\mathbf{E}] = -\mu\mu_0 \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t}, \tag{2.1}$$

$$\nabla\mathbf{H} = 0, \tag{2.2}$$

$$[\nabla\mathbf{H}] = \varepsilon\varepsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}, \tag{2.3}$$

$$\nabla\mathbf{E} = 0. \tag{2.4}$$

Возьмем ротор от обеих частей уравнения (2.1):

$$[\nabla, [\nabla\mathbf{E}]] = -\mu\mu_0 [\nabla, \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t}]. \tag{2.5}$$

Символ ∇ означает дифференцирование по координатам. Изменение последовательности дифференцирования по координатам и времени приводит к равенству

$$[\nabla, \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t}] = \frac{\partial}{\partial t}[\nabla \mathbf{H}].$$

Произведя в (2.5) такую замену и подставив в получившееся уравнение значение (2.3) для ротора **H**, получим

$$[\nabla, [\nabla \mathbf{E}]] = -\varepsilon\varepsilon_0\mu\mu_0 \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2}. \qquad (2.6)$$

Согласно (1.109) кн. 2 $[\nabla, [\nabla \mathbf{E}]] = \nabla(\nabla \mathbf{E}) - \Delta \mathbf{E}$. В силу (2.4) первый член этого выражения равен нулю. Поэтому левая часть формулы (2.6) представляет собой $-\Delta \mathbf{E}$. Таким образом, опустив слева и справа знак минус, приходим к уравнению

$$\Delta \mathbf{E} = \varepsilon\varepsilon_0\mu\mu_0 \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2}.$$

В соответствии с (6.15) кн. 2 $\varepsilon_0\mu_0 = 1/c^2$. Поэтому уравнению можно придать вид

$$\Delta \mathbf{E} = \frac{\varepsilon\mu}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2}. \qquad (2.7)$$

Раскрыв оператор Лапласа, получим

$$\frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial z^2} = \frac{\varepsilon\mu}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2}. \qquad (2.8)$$

Взяв ротор от обеих частей уравнения (2.3) и произведя аналогичные преобразования, придем к уравнению

$$\frac{\partial^2 \mathbf{H}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \mathbf{H}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \mathbf{H}}{\partial z^2} = \frac{\varepsilon\mu}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{H}}{\partial t^2}. \qquad (2.9)$$

Уравнения (2.8) и (2.9) неразрывно связаны друг с другом, так как они получены из уравнений (2.1) и (2.3), каждое из которых содержит и **E**, и **H**.

Уравнения (2.8) и (2.9) представляют собой типичные волновые уравнения (см. (1.24)). Всякая функция, удовлетворяющая такому уравнению, описывает некоторую волну, причем корень квадратный из величины, обратной коэффициенту при производной по времени, дает фазовую скорость этой волны. Следовательно, уравнения (2.8) и

(2.9) указывают на то, что электромагнитные поля могут существовать в виде электромагнитных волн, фазовая скорость которых равна

$$v = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon\mu}}. \qquad (2.10)$$

В вакууме (т. е. при $\varepsilon = \mu = 1$) скорость электромагнитных волн совпадает со скоростью света в вакууме c.

2.2. Плоская электромагнитная волна

Исследуем плоскую электромагнитную волну, распространяющуюся в нейтральной непроводящей среде с постоянными проницаемостями ε и μ ($\rho = 0$, $j = 0$, $\varepsilon = \text{const}$, $\mu = \text{const}$). Направим ось x перпендикулярно к волновым поверхностям. Тогда **E** и **H**, а значит, и их компоненты по координатным осям не будут зависеть от координат y и z. Поэтому уравнения (9.21)-(9.24) кн. 2 упрощаются следующим образом:

$$0 = \mu\mu_0 \frac{\partial H_x}{\partial t}, \quad \frac{\partial E_z}{\partial x} = \mu\mu_0 \frac{\partial H_y}{\partial t}, \quad \frac{\partial E_y}{\partial x} \quad -\mu\mu_0 \frac{\partial H_z}{\partial t}, \qquad (2.11)$$

$$\frac{\partial B_x}{\partial x} = \mu\mu_0 \frac{\partial H_z}{\partial t} = 0, \qquad (2.12)$$

$$0 = \varepsilon\varepsilon_0 \frac{\partial E_x}{\partial t}, \quad \frac{\partial H_z}{\partial x} = -\varepsilon\varepsilon_0 \frac{\partial E_y}{\partial t}, \quad \frac{\partial H_y}{\partial x} = \varepsilon\varepsilon_0 \frac{\partial E_z}{\partial t}, \qquad (2.13)$$

$$\frac{\partial D_x}{\partial x} = \varepsilon\varepsilon_0 \frac{\partial E_x}{\partial x} = 0. \qquad (2.14)$$

Уравнение (2.14) и первое из уравнений (2.13) показывают, что E_x не может зависеть ни от x, ни от t. Уравнение (2.12) и первое из уравнений (2.11) дают такой же результат для H_x. Следовательно, отличные от нуля E_x и H_x могут быть обусловлены лишь постоянными однородными полями, накладывающимися на электромагнитное поле волны. Само поле волны не имеет составляющих вдоль оси x. Отсюда вытекает, что векторы **E** и **H** перпендикулярны к направлению распространения волны, т. е. что электромагнитные волны поперечны. В дальнейшем мы будем предполагать постоянные поля отсутствующими и полагать $E_x = H_x = 0$.

Два последних уравнения (2.11) и два последних уравнения (2.13) можно объединить в две независимые группы:

$$\frac{\partial E_y}{\partial x} = -\mu\mu_0\frac{\partial H_z}{\partial t}, \quad \frac{\partial H_z}{\partial x} = -\varepsilon\varepsilon_0\frac{\partial E_y}{\partial t}, \tag{2.15}$$

$$\frac{\partial E_z}{\partial x} = \mu\mu_0\frac{\partial H_y}{\partial t}, \quad \frac{\partial H_y}{\partial x} = \varepsilon\varepsilon_0\frac{\partial E_z}{\partial t}. \tag{2.16}$$

Первая группа уравнений связывает компоненты E_y и H_z, вторая — компоненты E_z и H_y. Допустим, что первоначально было создано переменное электрическое поле E_y, направленное вдоль оси y. Согласно второму из уравнений (2.15) это поле создаст магнитное поле H_z, направленное вдоль оси z. В соответствии с первым из уравнений (2.15) поле H_z создаст электрическое поле E_y, и т. д. Ни поле E_z, ни поле H_y при этом не возникают. Аналогично, если первоначально было создано поле E_z, то согласно уравнениям (2.16) появится поле H_y, которое возбудит поле E_z, и т. д. В этом случае не возникают поля E_y и H_z. Таким образом, для описания плоской электромагнитной волны достаточно взять одну из систем уравнений (2.15) или (2.16), положив компоненты, фигурирующие в другой системе, равными нулю.

Возьмем для описания волны уравнения (2.15), положив $E_z = H_y = 0$. Продифференцируем первое уравнение по x и произведем замену: $(\partial/\partial x)(\partial H_z/\partial t) = (\partial/\partial t)(\partial H_z/\partial x)$. Подставив затем $\partial H_z/\partial x$ из второго уравнения, получим волновое уравнение для E_y:

$$\frac{\partial^2 E_y}{\partial x^2} = \frac{\varepsilon\mu}{c^2}\frac{\partial^2 E_y}{\partial t^2} \tag{2.17}$$

(мы заменили $\varepsilon_0\mu_0$ на c^2). Продифференцировав по x второе из уравнений (2.15), найдем после аналогичных преобразований волновое уравнение для H_z:

$$\frac{\partial^2 H_z}{\partial x^2} = \frac{\varepsilon\mu}{c^2}\frac{\partial^2 H_z}{\partial t^2}. \tag{2.18}$$

Полученные уравнения представляют собой частный случай уравнений (2.8) и (2.9).

Напомним, что $E_x = E_z = 0$ и $H_x = H_y = 0$, так что $E_y = E$ и $H_z = H$. Мы сохранили в уравнениях (2.17)

и (2.18) индексы y и z при E и H, чтобы подчеркнуть то обстоятельство, что векторы **E** и **H** направлены вдоль взаимно перпендикулярных осей y и z.

Простейшим решением уравнения (2.17) является функция

$$E_y = E_m \cos(\omega t - kx + \alpha_1). \tag{2.19}$$

Решение уравнения (2.18) имеет аналогичный вид:

$$H_z = H_m \cos(\omega t - kx + \alpha_2). \tag{2.20}$$

В этих формулах ω — частота волны, k — волновое число, равное ω/v, α_1 и α_2 — начальные фазы колебаний в точках с координатой $x = 0$.

Подставим функции (2.19) и (2.20) в уравнения (2.15):

$$kE_m \sin(\omega t - kx + \alpha_1) = \mu\mu_0\omega H_m \sin(\omega t - kx + \alpha_2),$$

$$kH_m \sin(\omega t - kx + \alpha_2) = \varepsilon\varepsilon_0\omega E_m \sin(\omega t - kx + \alpha_1).$$

Для того чтобы уравнения удовлетворялись, необходимо равенство начальных фаз α_1 и α_2. Кроме того, должны выполняться соотношения

$$kE_m = \mu\mu_0\omega H_m, \quad \varepsilon\varepsilon_0\omega E_m = kH_m.$$

Перемножив эти два равенства, найдем, что

$$\varepsilon\varepsilon_0 E_m^2 = \mu\mu_0 H_m^2. \tag{2.21}$$

Таким образом, колебания электрического и магнитного векторов в электромагнитной волне происходят с одинаковой фазой ($\alpha_1 = \alpha_2$), а амплитуды этих векторов связаны соотношением

$$E_m\sqrt{\varepsilon\varepsilon_0} = H_m\sqrt{\mu\mu_0}. \tag{2.22}$$

Для волны, распространяющейся в вакууме,

$$\frac{E_m}{H_m} = \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}} = \sqrt{4\pi \cdot 10^{-7} \cdot 4\pi \cdot 9 \cdot 10^9} =$$

$$= \sqrt{(4\pi)^2 \cdot 900} = 120\pi \approx 377 \text{ [Ом]}. \tag{2.23}$$

В гауссовой системе формула (2.22) имеет вид

$$E_m\sqrt{\varepsilon} = H_m\sqrt{\mu}.$$

Следовательно, в вакууме $E_m = H_m$ (E_m измеряется в СГСЭ-единицах, H_m — в СГСМ-единицах).

Умножив уравнение (2.19) на орт оси y ($E_y\mathbf{e}_y = \mathbf{E}$), а уравнение (2.20) на орт оси z ($H_z\mathbf{e}_z = \mathbf{H}$), получим уравнения плоской электромагнитной волны в векторном виде:

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_m \cos(\omega t - kx), \quad \mathbf{H} = \mathbf{H}_m \cos(\omega t - kx) \tag{2.24}$$

(мы положили $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$).

На рис. 2.1 показана «моментальная фотография» плоской электромагнитной волны. На рисунке видно, что векторы **E** и **H** образуют с направлением распространения волны правовинтовую систему. В фиксированной точке пространства векторы **E** и **H** изменяются со временем по гармоническому закону. Они одновременно увеличиваются от нуля, затем через 1/4 периода достигают наибольшего значения, причем, если **E** направлен вверх, то **H** направлен вправо (смотрим вдоль направления, по которому распространяется волна). Еще через 1/4 периода оба вектора одновременно обращаются в нуль. Затем опять достигают наибольшего значения, но на этот раз **E** направлен вниз, а **H** влево. И, наконец, по завершении периода колебания векторы снова обращаются в нуль. Такие изменения векторов **E** и **H** происходят во всех точках пространства, но со сдвигом по фазе, определяемым расстоянием между точками, отсчитанными вдоль оси x.

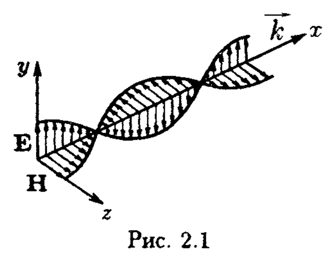


Рис. 2.1

2.3. Экспериментальное исследование электромагнитных волн

Первые опыты с несветовыми электромагнитными волнами были осуществлены Г. Герцем в 1888 г. Для получения волн Герц применил изобретенный им вибратор, состоящий из двух стержней, разделенных искровым промежутком. При подаче на вибратор высокого напряжения от индукционной катушки в промежутке проскакивала искра. Она закорачивала промежуток, и в вибраторе возникали затухающие электрические колебания (рис. 2.2; показанные на рисунке дроссели предназначались для того, чтобы высокочастотный ток не ответвлялся в обмотку индуктора). За время горения искры успевало совершиться большое число колебаний, порождавших цуг электромагнитных волн, длина которых приблизительно в два раза

превышала длину вибратора. Помещая вибраторы разной длины в фокусе вогнутого параболического зеркала, Герц получал направленные плоские волны, длина которых составляла от 0,6 до 10 м.

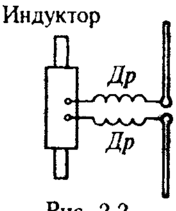


Рис. 2.2

Исследование излучаемой волны Герц осуществлял также при помощи полуволнового вибратора с небольшим искровым промежутком посредине. При размещении такого вибратора параллельно вектору напряженности электрического поля волны в нем возбуждались колебания тока и напряжения. Поскольку длина вибратора выбиралась равной $\lambda/2$, колебания в нем вследствие резонанса достигали такой интенсивности, что вызывали проскакивание в искровом промежутке небольших искр.

С помощью больших металлических зеркал и асфальтовой призмы (размером более 1 м и массой 1200 кг) Герц осуществил отражение и преломление электромагнитных волн и обнаружил, что оба эти явления подчиняются законам, установленным в оптике для световых волн. Отразив бегущую плоскую волну с помощью металлического зеркала в обратном направлении, Герц получил стоячую волну. Расстояние между узлами и пучностями волны позволяло определить длину волны λ. Умножив λ на частоту колебаний вибратора ν, можно было найти скорость электромагнитных волн, которая оказалась близкой к c. Располагая на пути волн решетку из параллельных друг другу медных проволок, Герц обнаружил, что при вращении решетки вокруг луча интенсивность волн, прошедших сквозь решетку, сильно изменяется. Когда проволоки, образующие решетку, были перпендикулярны к вектору **E**, волна проходила сквозь решетку без помех. При расположении проволок параллельно **E** волна сквозь решетку не проходила. Таким образом была доказана поперечность электромагнитных волн.

Опыты Герца были продолжены Лебедевым[1]), который в 1894 г. получил электромагнитные волны длиной 6 мм и исследовал прохождение их в кристаллах. При этом было обнаружено двойное преломление волн (см. § 6.3).

В 1896 г. Попов[2]) впервые осуществил с помощью электромагнитных волн передачу сообщения на рассто-

---

[1]) Петр Николаевич Лебедев (1866-1912) — русский физик.

[2]) Александр Степанович Попов (1859-1906) — русский физик и электротехник.

яние около 250 м (были переданы слова «Генрих Герц»). Тем самым было положено основание радиотехнике.

2.4. Энергия электромагнитных волн

Электромагнитные волны переносят энергию. Согласно формуле (1.46) плотность потока энергии можно получить, умножив плотность энергии на скорость волны.

Рассмотрим случай, когда электромагнитная волна распространяется в вакууме. В этом случае скорость волны равна c. Плотность энергии электромагнитного поля w слагается из плотности энергии электрического поля и плотности энергии магнитного поля:

$$w = w_E + w_H = \frac{\varepsilon_0 E^2}{2} + \frac{\mu_0 H^2}{2} \tag{2.25}$$

(см. формулы (4.10) и (8.40) кн. 2; для вакуума $\varepsilon = \mu = 1$).

В данной точке пространства векторы $\mathbf{E}$ и $\mathbf{H}$ изменяются в одинаковой фазе[3]). Поэтому соотношение (2.22) между амплитудными значениями E и H справедливо и для их мгновенных значений. Положив в (2.22) $\varepsilon = \mu = 1$, придем к соотношению

$$E\sqrt{\varepsilon_0} = H\sqrt{\mu_0}. \tag{2.26}$$

Отсюда следует, что плотности энергии электрического и магнитного полей волны в каждый момент времени одинаковы: $w_E = w_H$.

С учетом (2.26) выражению (2.25) можно придать вид

$$w = \frac{1}{2}(E\sqrt{\varepsilon_0})(E\sqrt{\varepsilon_0}) + \frac{1}{2}(H\sqrt{\mu_0})(H\sqrt{\mu_0}) = \\ = \sqrt{\varepsilon_0\mu_0}EH = \frac{1}{c}EH$$

(см. формулу (6.15) кн. 2). Умножив найденное выражение для w на скорость волны c, получим модуль плотности потока энергии:

$$S = wc = EH \tag{2.27}$$

---

[3])Это справедливо только для вакуума и непроводящей среды. В проводящей среде фазы $\boldsymbol{E}$ и $\boldsymbol{H}$ не совпадают.

Векторы **E** и **H** взаимно перпендикулярны и образуют с направлением распространения волны правовинтовую систему. Поэтому направление вектора [**EH**] совпадает с направлением переноса энергии, а модуль этого вектора равен EH. Следовательно, вектор плотности потока электромагнитной энергии можно представить как векторное произведение **E** и **H**:

$$\mathbf{S} = [\mathbf{EH}] \tag{2.28}$$

Вектор **S** называется вектором Пойнтинга[4]).

Можно показать, что формула (2.28) оказывается справедливой и в случае, когда электромагнитная волна распространяется в диэлектрической или проводящей среде.

По аналогии с формулой (1.50) поток Φ электромагнитной энергии через некоторую поверхность F можно найти с помощью интегрирования:

$$\Phi = \int_F \mathbf{S}\, d\mathbf{F} \tag{2.29}$$

(в формуле (1.50) буква S обозначала поверхность; поскольку буквой S принято обозначать вектор Пойнтинга, нам пришлось обозначить поверхность буквой F).

В качестве примера на применение формул (2.28) и (2.29) рассмотрим участок однородного цилиндрического проводника, по которому течет постоянный ток (рис. 2.3). Вначале будем считать, что на этом участке сторонние силы отсутствуют. Тогда согласно формуле (5.22) кн. 2 в каждой точке проводника выполняется соотношение

$$\mathbf{j} = \sigma \mathbf{E} = \frac{1}{\rho}\mathbf{E}.$$

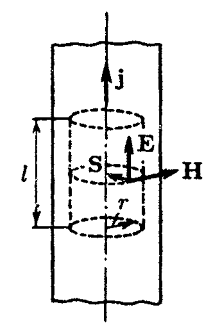


Рис. 2.3

Постоянный ток распределяется по сечению провода с одинаковой плотностью **j**. Следовательно, электрическое поле в пределах изображенного на рис. 2.3 участка проводника будет однородным. Выделим мысленно внутри проводника цилиндрический объем радиуса r и длины l. В каждой точке боковой поверхности этого цилиндра вектор **H** перпендикулярен к

[4]) Джон Генри Пойнтинг (1852–1914) — английский физик.

вектору **E** и направлен по касательной к поверхности. Модуль **H** равен $jr/2$ ($2\pi rH = j\pi r^2$ согласно (7.10) кн. 2). Таким образом, вектор (2.28) в каждой точке поверхности направлен к оси провода и имеет модуль $S = EH = Ejr/2$. Умножив S на боковую поверхность цилиндра F, равную $2\pi rl$, найдем, что внутрь рассматриваемого нами объема втекает поток электромагнитной энергии

$$\Phi = SF = \frac{1}{2}Ejr \cdot 2\pi rl = Ej \cdot \pi r^2 l = Ej \cdot V, \qquad (2.30)$$

где V — объем цилиндра.

Согласно (5.39) кн. 2 $Ej = \rho j^2$ есть количество теплоты, выделяющееся в единицу времени в единице объема проводника. Следовательно, равенство (2.30) указывает на то, что энергия, выделяющаяся в виде ленц-джоулевой теплоты, поступает в проводник через его боковую поверхность в виде энергии электромагнитного поля. По мере проникновения в глубь проводника поток энергии постепенно ослабляется (уменьшается и вектор Пойнтинга, и поверхность, через которую течет поток) за счет поглощения энергии и превращения ее в теплоту.

Теперь допустим, что в пределах рассматриваемого нами участка проводника действуют сторонние силы, поле которых однородно ($\mathbf{E}^* = \text{const}$). В этом случае согласно формуле (5.25) кн. 2 в каждой точке проводника имеет место соотношение

$$\mathbf{j} = \sigma(\mathbf{E} + \mathbf{E}^*) = \frac{1}{\rho}(\mathbf{E} + \mathbf{E}^*),$$

из которого вытекает, что

$$\mathbf{E} = \rho j = \mathbf{E}^*. \qquad (2.31)$$

Будем считать, что сторонние силы на рассматриваемом участке цепи не противятся, а способствуют прохождению тока. Это означает, что направление $\mathbf{E}^*$ совпадает с направлением $\mathbf{j}$. Допустим, что выполняется соотношение $\rho j = E^*$. Тогда согласно (2.30) напряженность электростатического поля **E** в каждой точке равна нулю, и поток электромагнитной энергии через боковую поверхность отсутствует. В этом случае теплота выделяется за счет работы сторонних сил.

Если же имеет место соотношение $E^* > \rho j$, то, как следует из (2.30), вектор **E** будет направлен противоположно

вектору **j**. В этом случае векторы **E** и **S** имеют направления, противоположные изображенным на рис. 2.3. Следовательно, электромагнитная энергия не втекает, а, наоборот, вытекает через боковую поверхность проводника в окружающее его пространство.

Резюмируя, можно сказать, что в замкнутой цепи постоянного тока энергия от участков, где действуют сторонние силы, передается другим участкам цепи не вдоль проводников, а через окружающее проводники пространство в виде потока электромагнитной энергии, характеризуемого вектором **S**.

2.5. Импульс электромагнитного поля

Поглощаясь в каком-либо теле, электромагнитная волна сообщает этому телу некоторый импульс, т. е. оказывает на него давление. Это можно показать на следующем примере. Пусть плоская волна падает по нормали на плоскую поверхность слабо проводящего тела с ε и μ, равными единице (рис. 2.4). Электрическое поле волны возбудит в теле ток плотности $\mathbf{j} = \sigma\mathbf{E}$. Магнитное поле волны будет действовать на ток с силой, которую в расчете на единицу объема тела можно найти по формуле (6.46) кн. 2:

$$\mathbf{F}_{\text{ед.об}} = [\mathbf{jB}] = \mu_0[\mathbf{jH}].$$

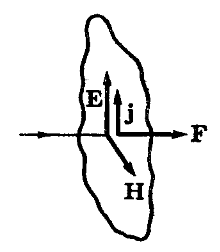


Рис. 2.4

Направление этой силы, как видно из рис. 2.4, совпадает с направлением распространения волны.

Поверхностному слою с площадью, равной единице, и толщиной dl сообщается в единицу времени импульс

$$dK = F_{\text{ед.об}}\, dl = \mu_0 jH\, dl \tag{2.32}$$

(векторы **j** и **H** взаимно перпендикулярны). В этом же слое в единицу времени поглощается энергия

$$dW = jE\, dl, \tag{2.33}$$

выделяющаяся в виде теплоты.

Импульс (2.32) и энергия (2.33) сообщаются слою волной. Возьмем их отношение, опустив за ненадобностью символ d:

$$\frac{K}{W} = \mu_0 \frac{H}{E}.$$

Приняв во внимание, что $\mu_0 H^2 = \varepsilon_0 E^2$, получим

$$\frac{K}{W} = \sqrt{\varepsilon_0 \mu_0} = \frac{1}{c}.$$

Отсюда вытекает, что электромагнитная волна, несущая энергию W, обладает импульсом

$$K = \frac{1}{c} W. \tag{2.34}$$

Такая же связь между энергией и импульсом имеет место для частиц с нулевой массой (см. формулу (6.74) кн. 1). Это не удивительно, поскольку согласно квантовым представлениям электромагнитная волна эквивалентна потоку фотонов, т. е. частиц, масса которых равна нулю.

Из (2.34) следует, что плотность импульса (т. е. импульс единицы объема) электромагнитного поля равна

$$K_{\text{ед.об}} = \frac{1}{c} w. \tag{2.35}$$

Плотность энергии связана с модулем вектора Пойнтинга соотношением $S = wc$. Заменив в (2.35) w на S/c и учтя, что направления векторов $\mathbf{K}$ и $\mathbf{S}$ совпадают, можно написать

$$\mathbf{K}_{\text{ед.об}} = \frac{1}{c^2} \mathbf{S} = \frac{1}{c^2} [\mathbf{EH}]. \tag{2.36}$$

Отметим, что при переносе энергии любого вида плотность потока энергии равна плотности импульса, умноженной на c^2. Рассмотрим, например, совокупность частиц, распределенных в пространстве с плотностью n и летящих с одинаковой по модулю и направлению скоростью $\mathbf{v}$. В этом случае плотность импульса равна

$$\mathbf{K}_{\text{ед.об}} = n \frac{m\mathbf{v}}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}. \tag{2.37}$$

Частицы переносят с собой энергию, плотность потока которой $\mathbf{j}_W$ равна плотности потока частиц, умноженной на энергию одной частицы:

$$\mathbf{j}_W = n\mathbf{v} \frac{mc^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}. \tag{2.38}$$

Из (2.37) и (2.38) следует, что

$$\mathbf{K}_{\text{ед.об}} = \frac{1}{c^2} \mathbf{j}_W. \tag{2.39}$$

Пусть падающая нормально на некоторое тело электромагнитная волна полностью поглощается этим телом. Тогда единице поверхности тела сообщается в единицу времени импульс волны, заключенный в цилиндре с площадью основания, равной единице, и высотой c. Согласно (2.35) этот импульс равен $(w/c)c = w$. Вместе с тем импульс, сообщаемый единице поверхности в единицу времени, равен давлению p на поверхность. Следовательно, в случае поглощающей поверхности $p = w$. Эта величина пульсирует с очень большой частотой. Поэтому практически может быть измерено ее среднее по времени значение. Таким образом,

$$p = \langle w \rangle. \tag{2.40}$$

Для идеально отражающей поверхности давление будет в два раза больше.

Давление, вычисленное по формуле (2.40), оказывается очень малым. Например, на расстоянии 1 м от источника света силой в миллион кандел давление составляет всего лишь около 10^{-7} Па ($\sim 10^{-9}$ Гс/см^2). Измерить световое давление удалось П. Н. Лебедеву. Осуществив опыты, потребовавшие большой изобретательности и мастерства, Лебедев измерил в 1900 г. давление света на твердые тела, а в 1910 г. — на газы. Результаты измерений оказались в полном согласии с теорией Максвелла.

2.6. Излучение диполя

Простейшей системой, излучающей электромагнитные волны, является колеблющийся электрический диполь. Примером такого диполя может служить система, образованная неподвижным точечным зарядом $+q$ и колеблющимся около него точечным зарядом $-q$ (рис. 2.5). Дипольный электрический момент этой системы изменяется со временем по закону

$$\mathbf{p} = -q\mathbf{r} = -ql\mathbf{e}\cos\omega t = \mathbf{p}_m \cos\omega t. \tag{2.41}$$

где $\mathbf{r}$ — радиус-вектор заряда $-q$, l — амплитуда колебаний, $\mathbf{e}$ — единичный вектор, направленный вдоль оси диполя, $\mathbf{p}_m = -ql\mathbf{e}$.

$-q$

$+q$

$(-q)$

Рис. 2.5

Ознакомление с подобной излучающей системой особенно важно в связи с тем, что многие вопросы взаимодействия излучения с веществом могут быть объяснены классически, исходя из представления

об атомах как о системах зарядов, в которых содержатся электроны, способные совершать гармонические колебания около положения равновесия.

Рассмотрим излучение диполя, размеры которого малы по сравнению с длиной волны ($l \ll \lambda$). Такой диполь называется элементарным. В непосредственной близости от диполя картина электромагнитного поля очень сложна. Она сильно упрощается в так называемой волновой зоне диполя, которая начинается на расстояниях r, значительно превышающих длину волны ($r \gg \lambda$). Если волна распространяется в однородной изотропной среде, то волновой фронт в волновой зоне будет сферическим (рис. 2.6). Векторы **E** и **H** в каждой точке взаимно перпендикулярны и перпендикулярны к лучу, т. е. радиусу-вектору, проведенному в данную точку из центра диполя.

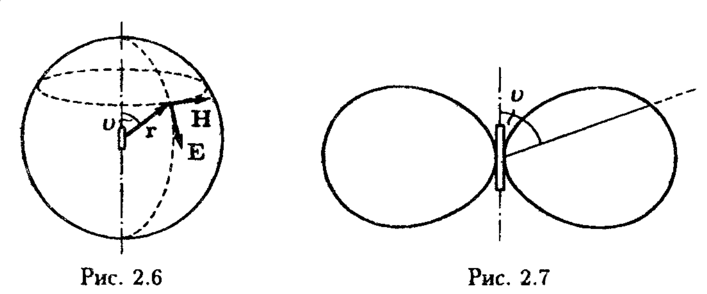


Рис. 2.6 Рис. 2.7

Назовем сечения волнового фронта плоскостями, проходящими через ось диполя, меридианами, а плоскостями, перпендикулярными к оси диполя, — параллелями. Тогда можно сказать, что вектор **E** в каждой точке волновой зоны направлен по касательной к меридиану, а вектор **H** — по касательной к параллели. Если смотреть вдоль луча **r**, то мгновенная картина волны будет такой же, как на рис. 2.1, с тем отличием, что амплитуда при перемещении вдоль луча постепенно убывает.

В каждой точке векторы **E** и **H** колеблются по закону $\cos(\omega t - kr)$. Амплитуды $\mathbf{E}_m$ и $\mathbf{H}_m$ зависят от расстояния r до излучателя и от угла ϑ между направлением радиуса-вектора **r** и осью диполя (см. рис. 2.6). Эта зависимость для вакуума имеет следующий вид:

$$E_m \sim H_m \sim \frac{1}{r}\sin\vartheta.$$

Среднее значение плотности потока энергии $\langle S \rangle$ пропорционально произведению $E_m H_m$, следовательно,

$$\langle S \rangle \sim \frac{1}{r^2} \sin^2 \vartheta. \qquad (2.42)$$

Из этой формулы вытекает, что интенсивность волны изменяется вдоль луча (при $\vartheta = \text{const}$) обратно пропорционально квадрату расстояния от излучателя. Кроме того, она зависит от угла ϑ. Сильнее всего излучает диполь в направлениях, перпендикулярных к его оси ($\vartheta = \pi/2$). В направлениях, совпадающих с осью ($\vartheta = 0$ и π), диполь не излучает. Зависимость интенсивности от угла ϑ очень наглядно изображается с помощью диаграммы направленности диполя (рис. 2.7). Эта диаграмма строится так, чтобы длина отрезка, отсекаемого ею на луче, проведенном из центра диполя, давала интенсивность излучения под углом ϑ.

Соответствующий расчет показывает, что мощность излучения диполя P (т. е. энергия, излучаемая по всем направлениям в единицу времени) пропорциональна квадрату второй производной дипольного момента по времени:

$$P \sim \ddot{\mathbf{p}}^2. \qquad (2.43)$$

Согласно формуле (2.41) $\ddot{\mathbf{p}}^2 = p_m^2 \omega^4 \cos^2 \omega t$. Подстановка этого значения в (2.43) дает

$$P \sim p_m^2 \omega^4 \cos^2 \omega t. \qquad (2.44)$$

Усреднив это выражение по времени, получим

$$\langle P \rangle = p_m^2 \omega^4. \qquad (2.45)$$

Таким образом, средняя мощность излучения диполя пропорциональна квадрату амплитуды электрического момента диполя и четвертой степени частоты. Поэтому при малой частоте излучение электрических систем (например, линий передачи переменного тока промышленной частоты) бывает незначительным.

Согласно (2.41) $\ddot{\mathbf{p}} = -q\ddot{\mathbf{r}} = -q\mathbf{w}$, где $\mathbf{w}$ — ускорение колеблющегося заряда. Подстановка этого выражения для $\ddot{\mathbf{p}}$ в формулу (2.43) дает, что[5])

$$P \sim q^2 \mathbf{w}^2 \qquad (2.46)$$

---

[5])Коэффициент пропорциональности в формуле (2.46) равен $\sqrt{\mu_0/\varepsilon_0}/6\pi c^2 = 20/c^2$ в СИ и $2/(3c^3)$ в гауссовой системе.

Эта формула определяет мощность излучения не только при колебаниях, но и при произвольном движении заряда. Всякий заряд, движущийся с ускорением, возбуждает электромагнитные волны, причем мощность излучения пропорциональна квадрату заряда и квадрату ускорения. Например, электроны, ускоряемые в бетатроне (см. § 10.5 кн. 2), теряют энергию за счет излучения, обусловленного в основном центростремительным ускорением $w_n = v^2/r$. Согласно формуле (2.46) количество теряемой энергии сильно растет с увеличением скорости электронов в бетатроне (пропорционально v^4). Поэтому возможное ускорение электронов в бетатроне ограничено пределом ~500 МэВ (при скорости, соответствующей этому значению, потери на излучение становятся равными энергии, сообщаемой электронам вихревым электрическим полем).

Заряд, совершающий гармонические колебания, излучает монохроматическую волну с частотой, равной частоте колебаний заряда. Если же ускорение заряда **w** изменяется не по гармоническому закону, излучение состоит из набора волн различных частот.

Согласно формуле (2.46) интенсивность обращается в нуль при $\mathbf{w} = 0$. Следовательно, электрон, движущийся с постоянной скоростью, не излучает электромагнитных волн. Это, однако, справедливо лишь в том случае, если скорость электрона $v_{эл}$ не превышает скорости света $v_{св} = c/\sqrt{\varepsilon\mu}$ в той среде, в которой движется электрон. В случае, когда $v_{эл} > v_{св}$, наблюдается излучение, о котором будет рассказано в § 7.6.

Часть II
Оптика

Глава 3
Предварительные сведения

3.1. Световая волна

Свет представляет собой сложное явление: в одних случаях он ведет себя как электромагнитная волна, в других — как поток особых частиц (фотонов). В данном томе излагается волновая оптика, т. е. круг явлений, в основе которых лежит волновая природа света. Совокупность явлений, обусловленных корпускулярной[1]) природой света, будет рассмотрена в пятой книге.

В электромагнитной волне колеблются векторы **E** и **H**. Как показывает опыт, физиологическое, фотохимическое, фотоэлектрическое и другие действия света вызываются колебаниями электрического вектора. В соответствии с этим мы будем в дальнейшем говорить о световом векторе, подразумевая под ним вектор напряженности электрического поля. О магнитном векторе световой волны мы упоминать почти не будем.

Модуль амплитуды светового вектора мы будем обозначать, как правило, буквой А (иногда E_m). Соответственно изменение во времени и пространстве проекции светового вектора на направление, вдоль которого он колеблется, будет описываться уравнением

$$E = A\cos(\omega t - kr + \alpha). \qquad (3.1)$$

Здесь k — волновое число, r — расстояние, отсчитываемое вдоль направления распространения световой волны. Для плоской волны, распространяющейся в непоглощающей среде, $A = \mathrm{const}$, для сферической волны A убывает как $1/r$, и т. д.

Отношение скорости световой волны в вакууме к фазовой скорости v в некоторой среде называется абсолютным показателем преломления этой среды и обозначается буквой n. Таким образом,

$$n = \frac{c}{v}. \qquad (3.2)$$

---

[1]) Корпускула — частица.

Сравнение с формулой (2.10) дает $n = \sqrt{\varepsilon\mu}$. Для подавляющего большинства прозрачных веществ μ практически не отличается от единицы. Поэтому можно считать, что

$$n = \sqrt{\varepsilon}. \qquad (3.3)$$

Формула (3.3) связывает оптические свойства вещества с его электрическими свойствами. На первый взгляд может показаться, что эта формула неверна. Например, для воды $\varepsilon = 81$, а $n = 1,33$. Однако надо иметь в виду, что значение $\varepsilon = 81$ получено из электростатических измерений. В быстропеременных электрических полях значение ε оказывается иным, причем оно зависит от частоты колебаний поля. Этим объясняется д и с п е р с и я света, т. е. зависимость показателя преломления (или скорости света) от частоты (или длины волны). Подстановка в формулу (3.3) значения ε, полученного для соответствующей частоты, приводит к правильному значению n.

Значения показателя преломления характеризуют о п т и ч е с к у ю п л о т н о с т ь с р е д ы. Среда с большим n называется оптически более плотной, чем среда с меньшим n. Соответственно среда с меньшим n называется оптически менее плотной, чем среда с большим n.

Длины волн видимого света заключены в пределах

$$\lambda_0 = 0,40 - 0,76 \text{ мкм } (4000 - 7600 \text{ Å}). \qquad (3.4)$$

Эти значения относятся к световым волнам в вакууме. В веществе длины световых волн будут иными. В случае колебаний частоты ν длина волны в вакууме равна $\lambda_0 = c/\nu$. В среде, в которой фазовая скорость световой волны $v = c/n$, длина волны имеет значение $\lambda = v/\nu = c/(\nu n) = \lambda_0/n$. Таким образом, длина световой волны в среде с показателем преломления n связана с длиной волны в вакууме соотношением

$$\lambda = \frac{\lambda_0}{n}. \qquad (3.5)$$

Частоты видимых световых волн лежат в пределах

$$\nu = (0,39 - 0,75) \cdot 10^{15} \text{ Гц}. \qquad (3.6)$$

Частота изменений вектора плотности потока энергии, переносимой волной, будет еще больше (она равна 2ν). Ни глаз, ни какой-либо иной приемник световой энергии не может уследить за столь частыми изменениями потока

энергии, вследствие чего они регистрируют усредненный по времени поток. Модуль среднего по времени значения плотности потока энергии, переносимой световой волной, носит название интенсивности света I в данной точке пространства. Плотность потока электромагнитной энергии определяется вектором Пойнтинга $\mathbf{S}$. Следовательно,

$$I = |\langle \mathbf{S} \rangle| = |\langle [\mathbf{EH}] \rangle|. \tag{3.7}$$

Усреднение производится за время «срабатывания» прибора, которое, как отмечалось, много больше периода колебаний волны. Измеряется интенсивность либо в энергетических единицах (например, в ваттах на квадратный метр), либо в световых единицах, носящих название «люмен на квадратный метр» (см. § 3.5).

Согласно формуле (2.22) модули амплитуд векторов $\mathbf{E}$ и $\mathbf{H}$ в электромагнитной волне связаны соотношением

$$E_m\sqrt{\varepsilon\varepsilon_0} = H_m\sqrt{\mu\mu_0} = H_m\sqrt{\mu_0}$$

(мы положили $\mu = 1$). Отсюда следует, что

$$H_m = \sqrt{\varepsilon}\sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}}E_m = nE_m\sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}},$$

где n — показатель преломления среды, в которой распространяется волна. Таким образом, H_m пропорционально E_m и n:

$$H_m \sim nE_m. \tag{3.8}$$

Модуль среднего значения вектора Пойнтинга пропорционален E_mH_m. Поэтому можно написать, что

$$I \sim nE_m^2 = nA^2 \tag{3.9}$$

(коэффициент пропорциональности равен $\sqrt{\varepsilon_0/\mu_0}/2$). Следовательно, интенсивность света пропорциональна показателю преломления среды и квадрату амплитуды световой волны.

Заметим, что при рассмотрении распространения света в однородной среде можно считать, что интенсивность пропорциональна квадрату амплитуды световой волны:

$$I \sim A^2. \tag{3.10}$$

Однако в случае прохождения света через границу раздела сред выражение для интенсивности, не учитывающее множитель n, приводит к несохранению светового потока.

Линии, вдоль которых распространяется световая энергия, называются лучами. Усредненный вектор Пойнтинга $\langle \mathbf{S} \rangle$ направлен в каждой точке по касательной к лучу. В изотропных средах направление $\langle \mathbf{S} \rangle$ совпадает с нормалью к волновой поверхности, т. е. с направлением волнового вектора $\mathbf{k}$. Следовательно, лучи перпендикулярны к волновым поверхностям. В анизотропных средах нормаль к волновой поверхности в общем случае не совпадает с направлением вектора Пойнтинга, так что лучи не ортогональны волновым поверхностям.

Несмотря на то что световые волны поперечны, они обычно не обнаруживают асимметрии относительно луча. Это обусловлено тем, что в естественном свете (т. е. свете, испускаемом обычными источниками) имеются колебания, совершающиеся в самых различных направлениях, перпендикулярных к лучу (рис. 3.1). Излучение светящегося тела слагается из волн, испускаемых его атомами. Процесс излучения отдельного атома продолжается около 10^{-8} с. За это время успевает образоваться последовательность горбов и впадин (или, как говорят, цуг волн) протяженностью примерно 3 м. «Погаснув», атом через некоторое время «вспыхивает» вновь. Одновременно «вспыхивает» много атомов. Возбужденные ими цуги волн, налагаясь друг на друга, образуют испускаемую телом световую волну. Плоскость колебаний для каждого цуга ориентирована случайным образом. Поэтому в результирующей волне колебания различных направлений представлены с равной вероятностью.

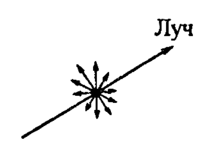


Рис. 3.1

В естественном свете колебания различных направлений быстро и беспорядочно сменяют друг друга. Свет, в котором направления колебаний упорядочены каким-либо образом, называется поляризованным. Если колебания светового вектора происходят только в одной проходящей через луч плоскости, свет называется плоскополяризованным (или линейнополяризованным). Упорядоченность может заключаться в том, что вектор $\mathbf{E}$ поворачивается вокруг луча, одновременно пульсируя по модулю. В результате конец вектора $\mathbf{E}$ описывает эллипс. Такой свет называется эллиптически-поляризованным. Если конец вектора $\mathbf{E}$ описывает окружность, свет называется поляризованным по кругу.

В главах 4 и 5 мы будем иметь дело с естественным светом. Поэтому направление колебаний светового вектора нас не будет особенно интересовать. Способы получения и свойства поляризованного света рассматриваются в гл. 6.

3.2. Представление гармонических функций с помощью экспонент

Образуем сумму двух комплексных чисел $z_1 = x_1 + iy_1$ и $z_2 = x_2 + iy_2$:

$$z = z_1 + z_2 = (x_1 + iy_1) + (x_2 + iy_2) = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2). \tag{3.11}$$

Из (3.11) следует, что вещественная часть суммы комплексных чисел равна сумме вещественных частей слагаемых:

$$\operatorname{Re}(z_1 + z_2) = \operatorname{Re} z_1 + \operatorname{Re} z_2. \tag{3.12}$$

Допустим, что комплексное число является функцией некоторого параметра, например времени t:

$$z(t) = x(t) + iy(t).$$

Продифференцировав эту функцию по t, получим

$$\frac{dz}{dt} = \frac{dx}{dt} + i\frac{dy}{dt}.$$

Отсюда вытекает, что вещественная часть производной z по t равна производной по t от вещественной части z:

$$\operatorname{Re}\frac{dz}{dt} = \frac{d}{dt}\operatorname{Re} z. \tag{3.13}$$

При интегрировании комплексной функции имеет место аналогичное соотношение. Действительно,

$$\int z(t)\,dt = \int x(t)\,dt + i\int y(t)\,dt,$$

откуда следует, что вещественная часть интеграла от $z(t)$ равна интегралу от вещественной части $z(t)$:

$$\operatorname{Re}\int z(t)\,dt = \int \operatorname{Re} z(t)\,dt. \tag{3.14}$$

Очевидно, что соотношения, аналогичные (3.12)–(3.14), имеют место также и для мнимых частей комплексных функций.

Из сказанного вытекает, что при выполнении над комплексными функциями операций сложения, дифференцирования и интегрирования, а также линейных комбинаций этих операций вещественная (мнимая) часть результата совпадает с результатом, который получился бы при выполнении аналогичных операций над вещественными (мнимыми) частями тех же функций[2]. Обозначив линейную комбинацию перечисленных выше операций символом $\tilde{L}$, можно написать

$$\mathrm{Re}\,\tilde{L}(z_1, z_2, \ldots) = \tilde{L}(\mathrm{Re}\,z_1, \mathrm{Re}\,z_2, \ldots). \tag{3.15}$$

Установленное нами свойство линейных операций позволяет применять следующий вычислительный прием: осуществляя линейные операции над гармоническими функциями вида

$$a\cos(\omega t - k_x x - k_y y - k_z z + \alpha),$$

заменять эти функции экспонентами

$$a\exp[i(\omega t - k_x x - k_y y - k_z z + \alpha)] = \\ = \hat{a}\exp[i(\omega t - k_x x - k_y y - k_z z)], \tag{3.16}$$

где $a = \hat{a}\exp(i\alpha)$ — комплексная величина, называемая **комплексной амплитудой**. При таком представлении можно производить сложение функций, дифференцирование по переменным t, x, y, z, а также интегрирование по этим переменным. Произведя вычисления, следует взять вещественную часть полученного результата. Целесообразность этого приема объясняется тем, что вычисления с экспонентами значительно проще вычислений, осуществляемых над тригонометрическими функциями.

Переходя к представлению (3.16), мы по существу добавляем к функциям вида $a\cos(\omega t - k_x x - k_y y - k_z z + \alpha)$ слагаемые $ia\sin(\omega t - k_x x - k_y y - k_z z + \alpha)$. Напомним, что подобный прием мы использовали при изучении вынужденных колебаний (см. §8.11 кн. 1).

3.3. Отражение и преломление плоской волны на границе двух диэлектриков

Пусть плоская электромагнитная волна падает на плоскую границу раздела двух однородных и изотропных диэлектриков. Диэлектрик, в котором распространяется па-

---

[2]) Отметим, что это правило неприменимо к нелинейным операциям, например к умножению функций, возведению в квадрат и т. п.

дающая волна, характеризуется проницаемостью ε_1, второй диэлектрик — проницаемостью ε_2. Магнитные проницаемости полагаем равными единице. Опыт показывает, что в этом случае, кроме распространяющейся во втором диэлектрике плоской преломленной волны, возникает плоская отраженная волна, распространяющаяся в первом диэлектрике.

Определим направление распространения падающей волны с помощью волнового вектора $\mathbf{k}$, отраженной волны с помощью вектора $\mathbf{k}'$ и, наконец, преломленной волны с помощью вектора $\mathbf{k}''$. Найдем, как связаны направления $\mathbf{k}'$ и $\mathbf{k}''$. Это можно сделать, воспользовавшись тем, что на границе двух диэлектриков должно выполняться условие

$$E_{1\tau} = E_{2\tau}. \tag{3.17}$$

Здесь $E_{1\tau}$ и $E_{2\tau}$ — тангенциальные составляющие напряженности электрического поля в первой и второй среде соответственно.

В § 2.7 кн. 2 мы доказали соотношение (3.17) для электростатических полей (см. формулу (2.44) кн. 2). Однако его легко распространить и на поля, изменяющиеся со временем. Согласно уравнению (9.17) кн. 2 определяемая выражением (2.42) циркуляция $\mathbf{E}$ в случае переменных полей должна быть равна не нулю, а интегралу $\int(-\dot{\mathbf{B}})\,d\mathbf{S}$, взятому по площади контура, изображенного на рис. 2.9:

$$\oint E_l\,dl = E_{1x}a - E_{2x}a + \langle E_b\rangle \cdot 2b = -\int\limits_{S=a\cdot b} \dot{\mathbf{B}}\,d\mathbf{S}.$$

Поскольку $\dot{\mathbf{B}}$ конечно, при предельном переходе $b \to 0$ интеграл в правой части обращается в нуль, и мы приходим к условию (2.43), из которого следует (2.44) кн. 2.

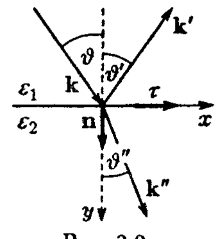


Рис. 3.2

Пусть вектор $\mathbf{k}$, определяющий направление распространения падающей волны, лежит в плоскости чертежа (рис. 3.2). Направление нормали к поверхности раздела охарактеризуем вектором n. Плоскость, в которой лежат векторы $\mathbf{k}$ и $\mathbf{n}$, называется плоскостью падения волны. Возьмем линию пересечения плоскости падения с границей раздела диэлектриков в качестве оси x. Ось y направим перпендикулярно к

плоскости раздела диэлектриков. Тогда ось z будет перпендикулярна к плоскости падения, а вектор τ окажется направленным вдоль оси x (рис. 3.2).

Из соображений симметрии ясно, что векторы $\mathbf{k}'$ и $\mathbf{k}''$ могут лежать лишь в плоскости падения (среды однородны и изотропны). Действительно, допустим, что, например, вектор $\mathbf{k}'$ отклонился от этой плоскости «на нас». Однако нет никаких оснований предпочесть такое отклонение равному ему отклонению «от нас». Поэтому единственно возможным оказывается направление вектора $\mathbf{k}'$, лежащее в плоскости падения. Аналогичные рассуждения справедливы и для вектора $\mathbf{k}''$.

Выделим из естественного падающего луча плоскополяризованную составляющую, в которой направление колебаний вектора $\mathbf{E}$ образует с плоскостью падения произвольный угол. Колебания вектора $\mathbf{E}$ в плоской электромагнитной волне, распространяющейся в направлении вектора $\mathbf{k}$, описывается функцией [3])

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_m \exp[i(\omega t - \mathbf{kr})] = \mathbf{E}_m \exp[i(\omega t - k_x x - k_y y)]$$

(при сделанном нами выборе осей координат проекция вектора $\mathbf{k}$ на ось z равна нулю, поэтому в показателе экспоненты отсутствует слагаемое $-k_z z$). За счет выбора начала отсчета t мы сделали начальную фазу волны равной нулю.

Напряженности в отраженной и преломленной волнах определяются аналогичными выражениями:

$$\mathbf{E}' = \mathbf{E}'_m \exp[i(\omega' t - k'_x x - k'_y y + \alpha')],$$
$$\mathbf{E}'' = \mathbf{E}''_m \exp[i(\omega'' t - k''_x x - k''_y y + \alpha'')]$$

(α' и α'' — начальные фазы соответствующих волн).

Результирующее поле в первой среде равно

$$\mathbf{E}_1 = \mathbf{E} + \mathbf{E}' = \mathbf{E}_m \exp[i(\omega t - k_x x - k_y y)] + \mathbf{E}'_m \exp[i(\omega' t - k'_x x - k'_y y + \alpha')]. \quad (3.18)$$

Во второй среде

$$\mathbf{E}_2 = \mathbf{E}'' = \mathbf{E}''_m \exp[i(\omega'' t - k''_x x - k''_y y + \alpha'')]. \quad (3.19)$$

---

[3]) Точнее, вещественной частью этой функции, но мы для краткости будем говорить просто функцией.

Согласно (3.17) тангенциальные составляющие выражений (3.18) и (3.19) на поверхности раздела, т. е. при $y = 0$, должны быть одинаковыми. Следовательно, мы приходим к соотношению

$$E_{m\tau} \exp[i(\omega t - k_x x)] + E'_{m\tau} \exp[i(\omega' t - k'_x x + \alpha')] = \\ = E''_{m\tau} \exp[i(\omega'' t - k''_x x + \alpha'')]. \quad (3.20)$$

Для того чтобы условие (3.20) выполнялось при любом t, необходимо равенство всех частот:

$$\omega = \omega' = \omega''. \quad (3.21)$$

Чтобы убедиться в этом, напишем равенство (3.20) в виде

$$a \exp(i\omega t) + b \exp(i\omega' t) = c \exp(i\omega'' t),$$

где коэффициенты a, b и c не зависят от t. Написанное нами равенство эквивалентно следующим двум:

$$a \cos(\omega t) + b \cos(\omega' t) = c \cos(\omega'' t),$$
$$a \sin(\omega t) + b \sin(\omega' t) = c \sin(\omega'' t).$$

Сумма двух гармонических функций будет также гармонической функцией только в том случае, если складываемые функции имеют одинаковые частоты. Получающаяся в результате сложения гармоническая функция имеет ту же частоту, что и складываемые функции. Отсюда следует соотношение (3.21). Таким образом, мы пришли к выводу, что частоты отраженной и преломленной волн совпадают с частотой падающей волны.

Для того чтобы условие (3.20) выполнялось при любом x, необходимо равенство проекций волновых векторов на ось x:

$$k_x = k'_x = k''_x. \quad (3.22)$$

Показанные на рис. 3.2 углы ϑ, ϑ' и ϑ'' называются соответственно *углом падения*, *углом отражения* и *углом преломления*. Из рисунка видно, что $k_x = k \sin\vartheta$, $k'_x = k' \sin\vartheta'$, $k''_x = k'' \sin\vartheta''$. Поэтому соотношение (3.22) можно написать в виде

$$k \sin\vartheta = k' \sin\vartheta' = k'' \sin\vartheta''.$$

Векторы $\mathbf{k}$ и $\mathbf{k}'$ имеют одинаковый модуль, равный ω/v_1; модуль вектора $\mathbf{k}''$ равен ω/v_2. Следовательно,

$$\frac{\omega}{v_1} \sin\vartheta = \frac{\omega}{v_1} \sin\vartheta' = \frac{\omega}{v_2} \sin\vartheta''.$$

Отсюда вытекает, что

$$\vartheta' = \vartheta, \tag{3.23}$$

$$\frac{\sin\vartheta}{\sin\vartheta''} = \frac{v_1}{v_2} = n_{12}. \tag{3.24}$$

Полученные нами соотношения выполняются для любой плоскополяризованной составляющей естественного луча. Следовательно, они справедливы и для естественного луча в целом.

Соотношение (3.23) выражает закон отражения света, согласно которому *отраженный луч лежит в одной плоскости с падающим лучом и нормалью, восстановленной в точке падения; угол отражения равен углу падения.*

Соотношение (3.24) выражает закон преломления света, который формулируется следующим образом: *преломленный луч лежит в одной плоскости с падающим лучом и нормалью, восстановленной в точке падения; отношение синуса угла падения к синусу угла преломления есть величина постоянная для данных веществ.*

Фигурирующая в формуле (3.24) величина n_{12} называется относительным показателем преломления второго вещества по отношению к первому. Представим эту величину в виде

$$n_{12} = \frac{v_1}{v_2} = \frac{c}{v_2}\frac{v_1}{c} = \frac{c/v_2}{c/v_1} = \frac{n_2}{n_1}. \tag{3.25}$$

Таким образом, относительный показатель преломления двух величин равен отношению их абсолютных показателей преломления.

Заменив в формуле (3.24) n_{12} отношением n_2/n_1 можно представить закон преломления в виде

$$n_1 \sin\vartheta = n_2 \sin\vartheta''. \tag{3.26}$$

Из этой формулы видно, что при переходе света из оптически более плотной среды в оптически менее плотную луч удаляется от нормали к поверхности раздела сред. Увеличение угла падения ϑ сопровождается более быстрым ростом угла преломления ϑ'', и по достижении углом ϑ значения

$$\vartheta_{\text{пред}} = \arcsin n_{12} \tag{3.27}$$

угол ϑ'' становится равным $\pi/2$. Угол, определяемый формулой (3.27), называется **предельным углом**.

Энергия, которую несет с собой падающий луч, распределяется между отраженным и преломленным лучами. По мере увеличения угла падения интенсивность отраженного луча растет, интенсивность же преломленного луча убывает, обращаясь в нуль при предельном угле. При углах падения, заключенных в пределах от $\vartheta_{\text{пред}}$ до $\pi/2$, световая волна проникает во вторую среду на расстояние порядка длины волны λ и затем возвращается в первую среду. Это явление называется **полным внутренним отражением**.

Найдем соотношение между амплитудами и фазами падающей, отраженной и преломленной волн. Для простоты ограничимся случаем нормального падения плоской волны на поверхность раздела однородных и изотропных диэлектриков с показателями преломления n_1 и n_2. Обозначим электрическую составляющую в падающей, отраженной и преломленной волнах соответственно через $\mathbf{E}$, $\mathbf{E}'$ и $\mathbf{E}''$, а магнитную составляющую через $\mathbf{H}$, $\mathbf{H}'$ и $\mathbf{H}''$. Из соображений симметрии следует, что колебания векторов $\mathbf{E}'$ и $\mathbf{E}''$ происходят вдоль того же направления, что и колебания вектора $\mathbf{E}$. Аналогично колебания векторов $\mathbf{H}'$ и $\mathbf{H}''$ происходят вдоль направления вектора $\mathbf{H}$.

В данном случае нормальные составляющие векторов $\mathbf{E}$ и $\mathbf{H}$ равны нулю. Поэтому тангенциальные составляющие этих векторов совпадают с самими векторами. На рис. 3.3 изображены мгновенные значения векторов $\mathbf{E}$ и $\mathbf{H}$ в падающей, отраженной и преломленной волнах. На рисунке показаны также орты $\mathbf{e}$, $\mathbf{e}'$ и $\mathbf{e}''$ направлений, вдоль которых распространяются соответствующие волны. Рисунок выполнен в предположении, что направления векторов $\mathbf{E}$ и $\mathbf{E}''$ одинаковы, а векторов $\mathbf{E}$ и $\mathbf{E}'$ противоположны (в этом случае векторы $\mathbf{H}$, $\mathbf{H}'$ и $\mathbf{H}''$ направлены за чертеж). Действительные соотношения между направлениями векторов определяются расчетом.

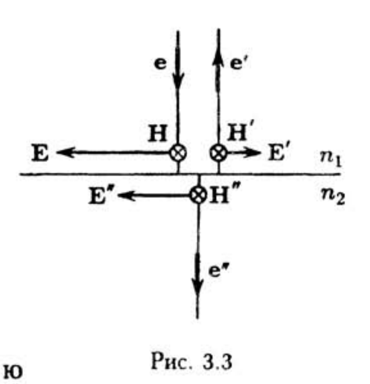


Рис. 3.3

Модули векторов **E** и **H** связаны соотношением $H = nE\sqrt{\varepsilon_0/\mu_0}$ (см. текст, предшествующий формуле (3.8); соотношения, полученные для амплитудных значений E и H, справедливы и для их мгновенных значений). Тройка векторов **E**, **H**, **e** образует правовинтовую систему. С учетом сказанного можно написать, что

$$\mathbf{H} = n_1\sqrt{\varepsilon_0/\mu_0}\,[\mathbf{eE}] \tag{3.28}$$

(см. рис. 3.3). Аналогичные соотношения имеют место и для векторов в отраженной и преломленной волнах.

Напишем условия непрерывности тангенциальных составляющих векторов **E** и **H** (см. формулы (2.44) и (7.35) кн. 2):

$$\mathbf{E} + \mathbf{E}' = \mathbf{E}'', \tag{3.29}$$

$$\mathbf{H} + \mathbf{H}' = \mathbf{H}''. \tag{3.30}$$

Напомним, что значения векторов берутся в непосредственной близости к границе раздела.

Заменив в (3.30) векторы **H** векторами **E** в соответствии с формулой (3.28), получим (после сокращения на $\sqrt{\varepsilon_0/\mu_0}$)

$$n_1[\mathbf{eE}] + n_1[\mathbf{e}'\mathbf{E}'] = n_2[\mathbf{e}''\mathbf{E}''].$$

Учтя, что $\mathbf{e} = \mathbf{e}' = -\mathbf{e}''$, преобразуем последнее соотношение следующим образом:

$$n_1[\mathbf{eE}] - n_1[\mathbf{eE}'] = n_2[\mathbf{eE}''].$$

Отсюда

$$[\mathbf{e}(n_1\mathbf{E})] = [\mathbf{e}(n_1\mathbf{E}' + n_2\mathbf{E}'')].$$

Поскольку векторы **e** и **E** взаимно перпендикулярны, из полученного равенства вытекает, что

$$n_1\mathbf{E} = n_1\mathbf{E}' + n_2\mathbf{E}''. \tag{3.31}$$

Решив совместно уравнения (3.29) и (3.31), получим соотношения

$$\mathbf{E}' = \frac{n_1 - n_2}{n_1 + n_2}\mathbf{E}, \tag{3.32}$$

$$\mathbf{E}'' = \frac{2n_1}{n_1 + n_2}\mathbf{E}. \tag{3.33}$$

Из формулы (3.33) вытекает, что векторы $\mathbf{E}$ и $\mathbf{E}''$ имеют в каждый момент времени одинаковое направление. Отсюда заключаем, что колебания в падающей и в прошедшей во вторую среду волнах происходят на границе раздела в одинаковой фазе — при прохождении волны через эту границу фаза не претерпевает скачка.

Из формулы (3.32) вытекает, что при $n_2 < n_1$ направление вектора $\mathbf{E}'$ совпадает с направлением вектора $\mathbf{E}$. Это означает, что колебания в падающей и отраженной волнах происходят на границе раздела в одинаковой фазе: фаза волны при отражении не изменяется. Если же $n_2 > n_1$, то направление вектора $\mathbf{E}'$ противоположно направлению $\mathbf{E}$. Это означает, что колебания в падающей и отраженной волнах происходят на границе раздела в противофазе: фаза волны при отражении изменяется скачком на π. Полученный результат справедлив и при наклонном падении волны на границу раздела двух прозрачных сред (см. § 6.2). Отметим, что показанное на рис. 3.3 направление векторов $\mathbf{E}$, $\mathbf{E}'$ и $\mathbf{E}''$ согласуется с результатом вычислений для случая $n_2 > n_1$.

Итак, при отражении световой волны от границы раздела среды, оптически менее плотной, со средой, оптически более плотной (при $n_1 < n_2$), фаза колебаний светового вектора претерпевает изменение на π. При отражении от границы раздела среды, оптически более плотной, со средой, оптически менее плотной (при $n_1 > n_2$), такого изменения фазы не происходит.

Подставив в выражение $n_1\mathbf{E}'^2 + n_2\mathbf{E}''^2$ значения (3.32) и (3.33) для $\mathbf{E}'$ и $\mathbf{E}''$, придем после несложных преобразований к соотношению

$$n_1 E^2 = n_1 E'^2 + n_2 E''^2.$$

Это соотношение получено для мгновенных значений E. Аналогичное соотношение имеет место и для амплитудных значений светового вектора:

$$n_1 E_m^2 = n_1 E_m'^2 + n_2 E_m''^2. \tag{3.34}$$

Согласно (3.9) выражение $n_1 E_m^2$ можно трактовать как величину, пропорциональную интенсивности I падающей волны, $n_1 E_m'^2$ — как величину, пропорциональную интенсивности I' отраженной волны, $n_2 E_m''^2$ — как величину, пропорциональную интенсивности I'' преломленной вол-

ны. Таким образом, соотношение (3.34) выражает закон сохранения энергии.

Полученные соотношения позволяют найти коэффициент отражения ρ и коэффициент пропускания τ световой волны (для случая нормального падения на границу раздела двух прозрачных сред). Действительно, по определению

$$\rho = \frac{I'}{I} = \frac{n_1 E_m'^2}{n_1 E_m^2}.$$

Подставив в это выражение отношение E_m'/E_m, полученное из (3.32), придем к формуле

$$\rho = \left(\frac{n_{12} - 1}{n_{12} + 1}\right)^2, \tag{3.35}$$

где $n_{12} = n_2/n_1$ — показатель преломления второй среды по отношению к первой.

Для коэффициента пропускания получается выражение

$$\tau = \frac{I''}{I} = \frac{n_2 E_m''^2}{n_1 E_m^2} = n_{12}\left(\frac{2}{n_{12} + 1}\right)^2. \tag{3.36}$$

Легко убедиться в том, что сумма $\rho + \tau$, как и должно быть, равна единице.

Отметим, что замена в формуле (3.35) n_{12} на обратную ему величину $n_{21} = 1/n_{12}$ не изменяет значения ρ. Следовательно, коэффициент отражения поверхности раздела двух данных сред для обоих направлений распространения света имеет одинаковое значение.

Показатель преломления стекол близок к 1,5. подстановка в формулу (3.35) $n_{12} = 1,5$ дает $\rho = 0,04$. Таким образом, каждая поверхность стеклянной пластинки отражает (при падении, близком к нормальному) около 4 % упавшей на нее световой энергии.

3.4. Световой поток

Всякая реальная световая волна представляет собой наложение волн с длинами, заключенными в некотором интервале $\Delta\lambda$. В белом свете $\Delta\lambda$ охватывает весь диапазон воспринимаемых глазом электромагнитных волн, т. е. простирается от 0,40 до 0,76 мкм. Свет, для которого

$\Delta\lambda \ll \lambda$, называется квазимонохроматическим (латинская приставка «квази» означает «мнимо»).

Распределение потока энергии по длинам волн можно охарактеризовать с помощью функции распределения

$$\varphi(\lambda) = \frac{d\Phi_э}{d\lambda}, \tag{3.37}$$

где $d\Phi_э$ — поток энергии, приходящийся на длины волн от λ до $\lambda + d\lambda$. Зная вид функции (3.37), можно вычислить поток энергии, переносимой волнами, заключенными в конечном интервале от λ_1 до λ_2:

$$\Phi_э = \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} \varphi(\lambda)\, d\lambda. \tag{3.38}$$

Действие света на глаз (световое ощущение) в сильной степени зависит от длины волны. Это легко понять, если учесть, что электромагнитные волны с λ, меньшей 0,40 мкм и большей 0,76 мкм, совсем не вызывают зрительного ощущения. Чувствительность среднего нормального человеческого глаза к излучению разной длины волны дается **кривой относительной спектральной чувствительности** (рис. 3.4). По горизонтальной оси

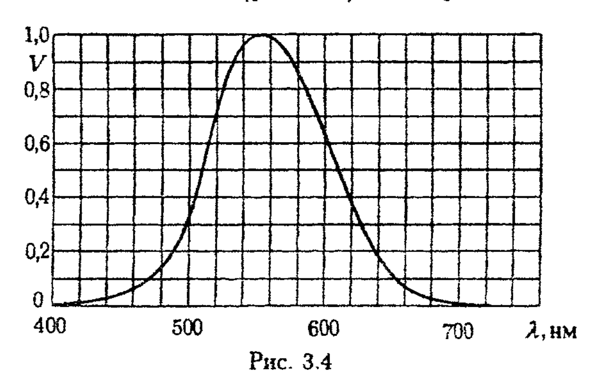


Рис. 3.4

отложена длина волны λ, по вертикальной оси — относительная спектральная чувствительность $V(\lambda)$. Наиболее чувствителен глаз к излучению с длиной волны 0,555 мкм [4]) (зеленая часть спектра). Функция $V(\lambda)$ для

[4]) Интересно, что в излучении Солнца эта длина волны представлена с наибольшей интенсивностью.

этой длины волны принята равной единице. При том же потоке энергии оцениваемая зрительно интенсивность света для других длин волн оказывается меньшей. Соответственно и $V(\lambda)$ для этих длин волн меньше единицы. Значения функции $V(\lambda)$ обратно пропорциональны значениям потоков энергии, которые вызывают одинаковое по интенсивности зрительное ощущение:

$$\frac{V(\lambda_1)}{V(\lambda_2)} = \frac{(d\Phi_э)_2}{(d\Phi_э)_1}.$$

Например, $V(\lambda) = 0,5$ означает, что для получения зрительного ощущения такой же интенсивности свет данной длины волны должен иметь плотность потока энергии, в два раза большую, чем свет, для которого $V(\lambda) = 1$. Вне интервала видимых длин волн функция $V(\lambda)$ равна нулю.

Для характеристики интенсивности света с учетом его способности вызывать зрительное ощущение вводится величина Φ, называемая **световым потоком**. Для интервала $d\lambda$ световой поток определяется как произведение потока энергии на соответствующее значение функции $V(\lambda)$:

$$d\Phi = V(\lambda)\, d\Phi_э. \tag{3.39}$$

Выразив поток энергии через функцию распределения энергии по длинам волн (см. (3.37)), получим

$$d\Phi = V(\lambda)\varphi(\lambda)\, d\lambda. \tag{3.40}$$

Полный световой поток равен

$$\Phi = \int_0^\infty V(\lambda)\varphi(\lambda)\, d\lambda. \tag{3.41}$$

Функция $V(\lambda)$ — безразмерная величина. Следовательно, размерность светового потока совпадает с размерностью потока энергии. Это позволяет определить световой поток как поток световой энергии, оцениваемый по зрительному ощущению.

3.5. Фотометрические величины и единицы

Фотометрией называется раздел оптики, занимающийся измерением световых потоков и величин, связанных с такими потоками.

Сила света. Источник света, размерами которого можно пренебречь по сравнению с расстоянием от места наблюдения до источника, называется точечным. В однородной и изотропной среде волна, излучаемая точечным источником, будет сферической. Для характеристики точечных источников света применяется сила света I, которая определяется как поток излучения источника, приходящийся на единицу телесного угла:

$$I = \frac{d\Phi}{d\Omega} \tag{3.42}$$

($d\Phi$ — световой поток, излучаемый источником в пределах телесного угла $d\Omega$).

В общем случае сила света зависит от направления: $I = I(\vartheta, \varphi)$ (ϑ и φ — полярный и азимутальный углы в сферической системе координат). Если I не зависит от направления, источник света называется изотропным. Для изотропного источника

$$I = \Phi/4\pi, \tag{3.43}$$

где Φ — полный световой поток, излучаемый источником по всем направлениям.

В случае протяженного источника модно говорить о силе света элемента его поверхности dS. Тогда под $d\Phi$ в формуле (3.42) следует понимать световой поток, излучаемый элементом поверхности dS в пределах телесного угла $d\Omega$. Единица силы света — кандела (кд) является одной из основных единиц Международной системы (СИ). Ее значение принимается таким, чтобы яркость (см. ниже) полного излучателя при температуре затвердевания платины была равна 60 кд на 1 см^2. Под полным излучателем понимается устройство, обладающее свойствами абсолютно черного тела (см. кн. 5).

Световой поток. Единицей светового потока является люмен (лм). Он равен световому потоку, излучаемому изотропным источником с силой света 1 кд в пределах телесного угла один стерадиан:

$$1 \text{ лм} = 1 \text{ кд} \cdot 1 \text{ ср}. \tag{3.44}$$

Опытным путем установлено, что световому потоку 1 лм, образованному излучением с длиной волны $\lambda = 0,555$ мкм, соответствует поток энергии 0,00146 Вт. Величина 0,00146 Вт/лм называется механическим

эквивалентом света. Световому потоку 1 лм, образованному излучением с другой длиной волны λ, соответствует поток энергии

$$\Phi_э = 0,00146/V(\lambda) \text{ Вт}. \tag{3.45}$$

Освещенность. Степень освещенности некоторой поверхности падающим на нее светом характеризуется величиной

$$E = \frac{d\Phi_{пад}}{dS}, \tag{3.46}$$

называемой освещенностью ($d\Phi_{пад}$ — световой поток, падающий на элемент поверхности dS).

Единицей освещенности является люкс (лк), равный освещенности, создаваемой потоком 1 лм, равномерно распределенным по поверхности площади 1 м^2:

$$1 \text{ лк} = 1 \text{ лм} : 1 \text{ м}^2. \tag{3.47}$$

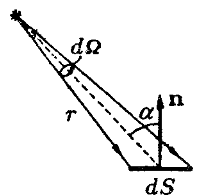


Рис. 3.5

Освещенность E, создаваемую точечным источником, можно выразить через силу света I, расстояние r от поверхности до источника и угол α между нормалью к поверхности $\mathbf{n}$ и направлением на источник. На площадку dS (рис. 3.5) падает поток $d\Phi_{пад} = Id\Omega$, заключенный в пределах телесного угла $d\Omega$, опирающегося на dS. Угол $d\Omega$ равен $dS\cos\alpha/r^2$. Следовательно, $d\Phi_{пад} = = IdS\cos\alpha/r^2$. Разделив этот поток на dS, получим

$$E = \frac{I\cos\alpha}{r^2}. \tag{3.48}$$

Светимость. Протяженный источник света можно охарактеризовать светимостью M различных его участков, под которой понимается световой поток, испускаемый единицей площади наружу по всем направлениям (в пределах значений ϑ от 0 до $\pi/2$; ϑ — угол, образуемый данным направлением с внешней нормалью к поверхности):

$$M = \frac{d\Phi_{исп}}{dS} \tag{3.49}$$

($d\Phi_{исп}$ — поток, испускаемый наружу по всем направлениям элементом поверхности dS источника).

Светимость может возникнуть за счет отражения поверхностью падающего на нее света. Тогда под $d\Phi_{\text{исп}}$ в формуле (3.49) следует понимать поток, отраженный элементом поверхности dS по всем направлениям.

Единицей светимости является люмен на квадратный метр (лм/м^2).

Яркость. Светимость характеризует излучение (или отражение) света данным местом поверхности по всем направлениям. Для характеристики излучения (отражения) света в заданном направлении служит яркость L. Направление можно задать полярным углом ϑ (отсчитываемым от внешней нормали $\mathbf{n}$ к излучающей площадке ΔS) и азимутальным углом φ. Яркость определяется как отношение силы света элементарной поверхности ΔS в данном направлении к проекции площадки ΔS на плоскость, перпендикулярную к взятому направлению.

Рассмотрим элементарный телесный угол $d\Omega$, опирающийся на светящуюся площадку ΔS и ориентированный в направлении (ϑ, φ) (рис. 3.6). Сила света площадки ΔS в данном направлении согласно определению (3.42) равна $I = d\Phi/d\Omega$, где $d\Phi$ — световой поток, распространяющийся в пределах угла $d\Omega$. Проекцией ΔS на плоскость, перпендикулярную к направлению (ϑ, φ) (на рис. 3.6 след этой плоскости изображен штриховой линией), будет $\Delta S \cos\vartheta$. Следовательно, яркость равна

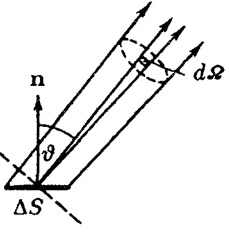


Рис. 3.6

$$L = \frac{d\Phi}{d\Omega \Delta S \cos\vartheta}. \qquad (3.50)$$

В общем случае яркость различна для разных направлений: $L = L(\vartheta, \varphi)$. Как и светимость, яркость может быть использована для характеристики поверхности, отражающей падающий на нее свет.

Согласно формуле (3.50) поток, излучаемый площадкой ΔS в пределах телесного угла $d\Omega$ по направлению, определяемому ϑ и φ, равен

$$d\Phi = L(\vartheta, \varphi)\, d\Omega\, \Delta S \cos\vartheta. \qquad (3.51)$$

Источники, яркость которых одинакова по всем направлениям ($L = \text{const}$), называются ламбертовскими

(подчиняющимися закону Ламберта)[5]) или косинусными (поток, посылаемый элементом поверхности такого источника, пропорционален $\cos\vartheta$). Строго следует закону Ламберта только абсолютно черное тело.

Светимость M и яркость L ламбертовского источника связаны простым соотношением. Чтобы найти его, подставим в (3.51) $d\Omega = \sin\vartheta\, d\vartheta\, d\varphi$ и проинтегрируем полученное выражение по φ в пределах от 0 до 2π и по ϑ от 0 до $\pi/2$, учтя, что $L = \text{const}$. В результате мы найдем полный световой поток, испускаемый элементом поверхности ΔS ламбертовского источника наружу по всем направлениям:

$$\Delta\Phi_{\text{исп}} = L\Delta S \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi/2} \sin\vartheta \cos\vartheta\, d\varphi = \pi L\, \Delta S.$$

Разделив этот поток на ΔS, получим светимость. Таким образом, для ламбертовского источника

$$M = \pi L. \tag{3.52}$$

Единицей яркости служит кандела на квадратный метр (кд/м^2). Яркостью 1 кд/м^2 обладает равномерно светящаяся плоская поверхность в направлении нормали к ней, если в этом направлении сила света одного квадратного метра поверхности равна одной канделе.

3.6. Геометрическая оптика

Длины воспринимаемых глазом световых волн очень малы (порядка 10^{-7} м). Поэтому распространение видимого света можно в первом приближении рассматривать, отвлекаясь от его волновой природы и полагая, что свет распространяется вдоль некоторых линий, называемых лучами. В предельном случае, соответствующем $\lambda \to 0$, законы оптики можно сформулировать на языке геометрии. В соответствии с этим раздел оптики, в котором пренебрегают конечностью длин волн, называется геометрической оптикой. Другое название этого раздела — лучевая оптика.

Основу геометрической оптики образуют четыре закона: 1) закон прямолинейного распространения света;

[5]) Иоганн Генрих Ламберт (1728–1777) — немецкий ученый, один из создателей фотометрии.

2) закон независимости световых лучей; 3) закон отражения света; 4) закон преломления света.

Закон прямолинейного распространения света утверждает, что *в однородной среде свет распространяется прямолинейно.* Этот закон является приближенным: при прохождении света через очень малые отверстия наблюдаются отклонения от прямолинейности, тем большие, чем меньше отверстие.

Закон независимости световых лучей утверждает, что *лучи при пересечении не возмущают друг друга.* Пересечения лучей не мешают каждому из них распространяться независимо друг от друга. Этот закон справедлив лишь при не слишком больших интенсивностях света. При интенсивностях, достигаемых с помощью лазеров, независимость световых лучей перестает соблюдаться.

Законы отражения и преломления света сформулированы § 3.3 (см. формулы (3.23) и (3.24) и следующий за ними текст).

В основу геометрической оптики может быть положен принцип, установленный Ферма[6]) в середине XVII столетия. Из этого принципа вытекают законы прямолинейного распространения, отражения и преломления света.

В формулировке самого Ферма принцип гласит, что *свет распространяется по такому пути, для прохождения которого ему требуется минимальное время.*

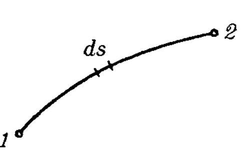


Рис. 3.7

Для прохождения участка пути ds (рис. 3.7) свету требуется время $dt = ds/v$, где v — скорость света в данной точке среды. Заменив v через c/n (см. (3.2)), получим, что $dt = (1/c)n\,ds$. Следовательно, время τ, затрачиваемое светом на прохождение пути от точки *1* до точки *2*, равно

$$\tau = \frac{1}{c}\int_1^2 n\,ds. \qquad (3.53)$$

[6]) Пьер Ферма (1601–1665) — французский математик.

Имеющая размерность длины величина

$$L = \int_1^2 n\, ds \tag{3.54}$$

называется **оптической длиной пути**. В однородной среде оптическая длина пути равна произведению геометрической длины пути s на показатель преломления среды n:

$$L = ns. \tag{3.55}$$

Согласно (3.53) и (3.54)

$$\tau = L/c. \tag{3.56}$$

Пропорциональность времени прохождения τ оптической длине пути L дает возможность сформулировать принцип Ферма следующим образом: *свет распространяется по такому пути, оптическая длина которого минимальна.* Точнее, оптическая длина пути должна быть экстремальной, т. е. либо минимальной, либо максимальной, либо стационарной — одинаковой для всех возможных путей. В последнем случае все пути света между двумя точками оказываются **таутохронными** (требующими для своего прохождения одинакового времени).

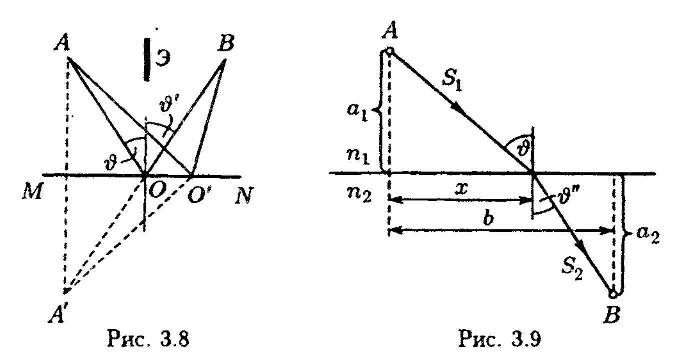


Рис. 3.8 Рис. 3.9

Из принципа Ферма вытекает обратимость световых лучей. Действительно, оптический путь, который минимален в случае распространения света из точки *1* в точку *2*, окажется минимальным и в случае распространения света в обратном направлении. Следовательно, луч, пущенный навстречу лучу, проделавшему путь от точки *1* к точке *2*, пройдет по тому же пути, но в обратном направлении.

Получим с помощью принципа Ферма законы отражения и преломления света. Пусть свет попадает из точки A в точку B, отразившись от поверхности MN (рис. 3.8) Прямой путь из A в B прегражден непрозрачным экраном $Э$. Среда, в которой проходит луч, однородна. Поэтому минимальность оптической длины пути сводится к минимальности его геометрической длины. Геометрическая длина произвольно взятого пути равна $AO'B = A'O'B$ (вспомогательная точка A' является зеркальным изображением точки A). Из рисунка видно, что наименьшей длиной обладает путь луча, отразившегося в точке O, для которой угол отражения равен углу падения. Заметим, что при удалении точки O' от точки O геометрическая длина пути неограниченно возрастает, так что в данном случае имеется только один экстремум — минимум.

Теперь найдем точку, в которой должен преломиться луч, распространяясь от A к B, чтобы оптическая длина пути была экстремальна (рис. 3.9). Для произвольного луча оптическая длина пути равна

$$L = n_1 s_1 + n_2 s_2 = n_1\sqrt{a_1^2 + x^2} + n_2\sqrt{a_2^2 + (b-x)^2}.$$

Чтобы найти экстремальное значение, продифференцируем L по x и приравняем производную нулю:

$$\frac{dL}{dx} = \frac{n_1 x}{\sqrt{a_1^2 + x^2}} - \frac{n_2(b-x)}{\sqrt{a_2^2 + (b-x)^2}} = n_1\frac{x}{s_1} - n_2\frac{b-x}{s_2} = 0.$$

Множители при n_1 и n_2 равны соответственно $\sin\vartheta$ и $\sin\vartheta''$. Таким образом, получается соотношение

$$n_1 \sin\vartheta = n_2 \sin\vartheta'',$$

выражающее закон преломления (см. формулу (3.26)).

Рассмотрим отражение от внутренней поверхности эллипсоида вращения (рис. 3.10; F_1 и F_2 — фокусы эллипсоида). В соответствии с определением эллипса пути F_1OF_2, $F_1O'F_2$, $F_1O''F_2$ и т. д. одинаковы по длине. Поэтому все лучи, вышедшие из фокуса F_1 и пришедшие после отражения в фокус F_2, являются таутохронными. В этом случае оптическая длина пути стационарна. Если заменить поверхность эллипсоида поверхностью MM, имеющей меньшую кривизну и ориентированной так, что луч, вышедший из точки F_1, после отражения от MM попадает в точку F_2, то путь F_1OF_2 будет минимальным. Для

поверхности NN, имеющей кривизну, большую, чем у эллипсоида, путь F_1OF_2 будет максимальным.

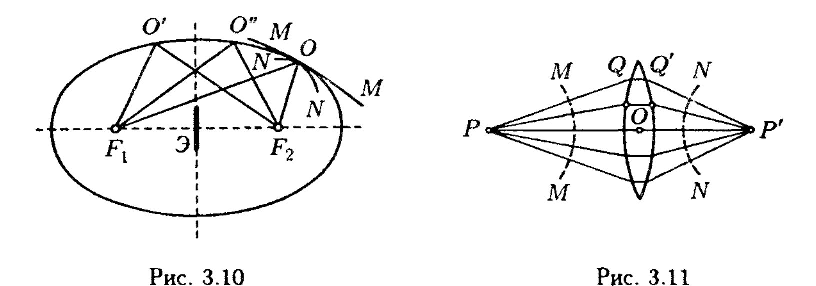


Рис. 3.10

Рис. 3.11

Стационарность оптических путей имеет место также при прохождении лучей через линзу (рис. 3.11). Луч POP' имеет самый короткий путь в воздухе (где показатель преломления n практически равен единице) и самый длинный путь в стекле ($n \approx 1,5$). Луч $PQQ'P'$ имеет более длинный путь в воздухе, но зато более короткий путь в стекле. В итоге оптические длины путей для всех лучей оказываются одинаковыми. Поэтому лучи таутохронны, а оптическая длина пути стационарна.

Рассмотрим волну, распространяющуюся в неоднородной изотропной среде вдоль лучей *1*, *2*, *3* и т. д. (рис. 3.12). Неоднородность будем считать достаточно малой для того, чтобы на отрезках лучей длины λ показатель преломления можно было считать постоянным. Построим волновые поверхности S_1, S_2, S_3 и т. д. таким образом, чтобы колебания в точках каждой следующей поверхности отставали по фазе на 2π от колебаний в точках предыдущей поверхности. Колебания в точках, лежащих на одном и том же луче, описываются уравнением $\xi = a\cos(\omega t - kr + \alpha)$ (r — расстояние, отсчитываемое вдоль луча). Отставание по фазе определяется выражением $k\Delta r$, где Δr — расстояние между соседними по-

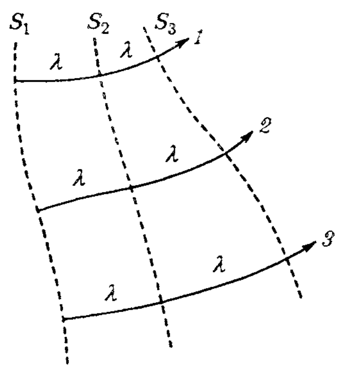


Рис. 3.12

верхностями. Из условия $k\Delta r = 2\pi$ получаем, что $\Delta r = 2\pi/k = \lambda$. Оптическая длина каждого из путей геометрической длины λ равна $n\lambda = \lambda_0$ (см. (3.5)). Согласно (3.56) время τ, за которое свет проходит некоторый путь, пропорционально оптической длине этого пути. Следовательно, равенство оптических длин означает равенство времен прохождения светом соответствующих путей. Таким образом, мы приходим к выводу, что отрезки лучей, заключенные между двумя волновыми поверхностями, имеют одинаковую оптическую длину и являются таутохронными. В частности, таутохронны отрезки лучей между изображенными штриховыми линиями на рис. 3.11 волновыми поверхностями MM и NN.

Из проведенного нами рассмотрения вытекает, что отставание по фазе δ, возникающее на пути с оптической длиной L, определяется выражением

$$\delta = \frac{L}{\lambda_0} \cdot 2\pi \tag{3.57}$$

(λ_0 — длина волны в вакууме).

3.7. Центрированная оптическая система

Совокупность лучей образует п у ч о к. Если лучи при своем продолжении пересекаются в одной точке, пучок называется г о м о ц е н т р и ч е с к и м. Гомоцентричекскому пучку лучей соответствует сферическая волновая поверхность. На рис. 3.13 *а* показан сходящийся, а на рис. 3.13 *б* — расходящийся гомоцентрический пучок. Частным случаем гомоцентрического пучка является пучок параллельных лучей; ему соответствует плоская световая волна.

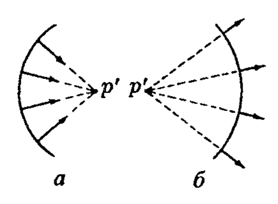


Рис. 3.13

Всякая оптическая система осуществляет преобразование световых пучков. Если система не нарушает гомоцентричности пучков, то лучи, вышедшие из точки P, пересекутся в одной точке P'. Эта точка представляет собой о п т и ч е с к о е и з о б р а ж е н и е точки P. Если любая точка предмета изображается в виде точки, изображение называется т о ч е ч н ы м или с т и г м а т и ч е с к и м.

Изображение называется действительным, если световые лучи в точке P' действительно пересекаются (см. рис. 3.13 *а*), и мнимым, если в P' пересекаются продолжения лучей, проведенные в направлении, обратном направлению распространения света (см. рис. 3.13 *б*).

Вследствие обратимости световых лучей источник света P и изображение P' могут поменяться ролями — точечный источник, помещенный в P', будет иметь свое изображение в P. По этой причине P и P' называются сопряженными точками.

Оптическая система, которая дает стигматическое изображение, геометрически подобное отображаемому предмету, называется идеальной. С помощью такой системы пространственная непрерывность точек P отображается в виде пространственной непрерывности точек P'. Первая непрерывность точек называется пространством предметов, вторая — пространством изображений. В обоих пространствах точки, прямые и плоскости однозначно соответствуют друг другу. Такое соотношение двух пространств называется в геометрии коллинеарным соответствием.

Оптическая система представляет собой совокупность отражающих и преломляющих поверхностей, отделяющих друг от друга оптически однородные среды. Обычно эти поверхности бывают сферическими или плоскими (плоскость можно рассматривать как сферу бесконечного радиуса). Реже применяются более сложные поверхности (эллипсоид, гиперболоид, параболоид вращения и др.).

Оптическая система, образованная сферическими (в частности, плоскими) поверхностями, называется центрированной, если центры всех поверхностей лежат на одной прямой. Эту прямую называют оптической осью системы.

Каждой точке P или плоскости S в пространстве предметов соответствует сопряженная с ней точка P' или плоскость S' в пространстве изображений. Среди бесконечного множества сопряженных точек и сопряженных плоскостей имеются точки и плоскости, обладающие особыми свойствами. Такие точки и плоскости называются кардинальными. К их числу относятся фокальные, главные и узловые точки и плоскости. Задание кардинальных точек или плоскостей полностью определяет свойства идеальной центрированной оптической системы.

Фокальные плоскости и фокусы оптической системы. На рис. 3.14 показаны внешние преломляющие поверхности и оптическая ось некоторой идеальной центрированной оптической системы. Возьмем в пространстве предметов этой системы плоскость S, перпендикулярную к оптической оси. Из соображений симметрии следует, что сопряженная с S плоскость S' также перпендикулярна к оптической оси. Перемещение плоскости S относительно системы вызовет соответствующее перемещение плоскости S'. Когда плоскость S окажется очень далеко, дальнейшее увеличение ее расстояния от системы практически не вы-

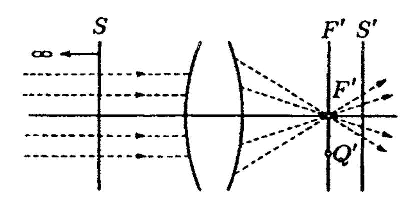


Рис. 3.14

зывает изменения положения плоскости S'. Это означает, что в результате удаления плоскости S на бесконечность плоскость S' оказывается в определенном предельном положении F'. Плоскость F', совпадающая с предельным положением плоскости S', называется *задней фокальной плоскостью* оптической системы. Кратко можно сказать, что задней фокальной плоскостью F' называется плоскость, сопряженная с находящейся на бесконечности в пространстве предметов плоскостью S_∞, перпендикулярной к оси системы.

Точка пересечения задней фокальной плоскости с оптической осью называется *задним фокусом* системы. Обозначают ее также буквой F'. Эта точка сопряжена с удаленной на бесконечность точкой P_∞, лежащей на оси системы. Лучи, выходящие из P_∞, образуют параллельный оси пучок (см. рис. 3.14). По выходе из системы эти лучи образуют пучок, сходящийся в фокусе F'. Упавший на систему параллельный пучок может выйти из системы не в виде сходящегося (как на рис. 3.14), а в виде расходящегося пучка. Тогда в точке F' будут пересекаться не сами вышедшие лучи, а их продолжения в обратном направлении. Соответственно задняя фокальная плоскость

окажется перед (по ходу лучей) системой или внутри системы.

Лучи, вышедшие из бесконечно удаленной точки Q_∞, не лежащей на оси системы, образуют параллельный пучок, направленный под углом к оси системы. По выходе из системы эти лучи образуют пучок, сходящийся в точке Q', принадлежащей задней фокальной плоскости, но не совпадающей с фокусом F' (см. точку Q' на рис. 3.14). Из сказанного следует, что изображение бесконечно удаленного предмета будет лежать в фокальной плоскости.

Если удалить на бесконечность перпендикулярную к оси плоскость S' (рис. 3.15), сопряженная с ней плоскость

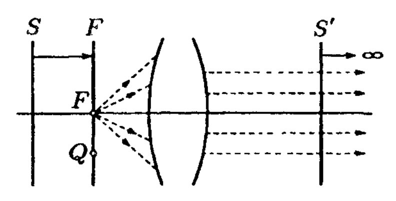


Рис. 3.15

S придет в предельное положение F, которое называется передней фокальной плоскостью системы.

Кратко можно сказать, что передней фокальной плоскостью F является плоскость, сопряженная с находящейся на бесконечности в пространстве изображений плоскостью S'_∞, перпендикулярной к оси системы.

Точка пересечения передней фокальной плоскости F с оптической осью называется передним фокусом системы. Обозначают этот фокус также буквой F. Лучи, вышедшие из фокуса F, образуют после выхода из системы пучок параллельных оси лучей. Лучи, вышедшие из точки Q, принадлежащей фокальной плоскости F (см. рис. 3.15), образуют после прохождения через систему параллельный пучок, направленный под углом к оси системы. Может случиться, что параллельный по выходе из системы пучок получается при падении на систему не расходящегося (как на рис. 3.15), а сходящегося пучка лучей. В этом случае передний фокус оказывается за системой или внутри системы.

Главные плоскости и точки. Рассмотрим две сопряженные плоскости, перпендикулярные к оптической оси

системы. Отрезок прямой y (рис. 3.16), лежащий в одной из этих плоскостей, будет иметь своим изображением отрезок прямой y', лежащий в другой плоскости. Из осевой симметрии системы вытекает, что отрезки y и y' должны лежать в одной, проходящей через оптическую ось, плоскости (в плоскости рисунка). При этом изображение y' может быть обращено либо в ту же сторону, что и предмет y (см. рис. 3.16 *а*), либо в противоположную сторону (см. рис. 3.16 *б*). В первом случае изображение называется

Рис. 3.16

прямым, во втором — *обратным*. Отрезки, откладываемые от оптической оси вверх, принято считать положительными, откладываемые вниз — отрицательными. На рисунках указываются действительные длины отрезков, т. е. для отрицательных отрезков — положительные величины $-y$ и $-y'$.

Отношение линейных размеров изображения и предмета называется *линейным* или *поперечным увеличением*. Обозначив его буквой β, можно написать

$$\beta = y'/y. \tag{3.58}$$

Линейное увеличение — алгебраическая величина. Оно положительно, если изображение прямое (знаки y и y' одинаковы), и отрицательно, если изображение обратное (знак y' противоположен знаку y).

Можно доказать, что существуют две такие сопряженные плоскости, которые отображают друг друга с линейным увеличением $\beta = +1$. Эти плоскости называются *главными*. Плоскость, принадлежащая пространству предметов, именуется *передней главной плоскостью* системы. Ее обозначают буквой H. Плоскость, принадлежащую пространству изображений, именуют *задней главной плоскостью*. Ее обозначают символом H'. Точки пересечения главных плоскостей с оптической осью называются *главными точками* системы (соответственно передней и задней). Их обозначают теми же символами H и H'. В зависимости от

устройства системы главные плоскости и точки могут находиться как вне, так и внутри системы. Может случиться, что одна из плоскостей проходит вне, а другая — внутри системы. Возможно, наконец, что обе плоскости будут лежать вне системы по одну и ту же сторону от нее.

Из определения главных плоскостей вытекает, что луч 1, пересекающий (в действительности — рис. 3.17 *а* или при воображаемом продолжении внутри системы — рис. 3.17 *б*) переднюю главную плоскость H в точке Q,

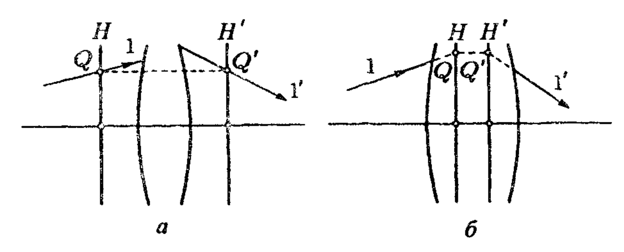


Рис. 3.17

имеет в качестве сопряженного луч 1′, который пересекает (непосредственно или при воображаемом продолжении) главную плоскость H' в точке Q', отстоящей в ту же сторону и на такое же расстояние от оси, как и точка Q. Это легко понять, если вспомнить, что Q и Q' являются сопряженными точками, и учесть, что любой луч, проходящий через точку Q, должен иметь в качестве сопряженного луч, проходящий через точку Q'.

Узловые плоскости и точки. Узловыми точками или узлами называются лежащие на оптической оси сопряженные точки N и N', обладающие тем свойством, что проходящие через них (в действительности или при воображаемом продолжении внутрь системы) сопряженные лучи параллельны между собой (см. лучи 1–1′ и 2–2′ на рис. 3.18). Перпендикулярные к оси плоскости, проходящие через узлы, называются узловыми плоскостями (передней и задней).

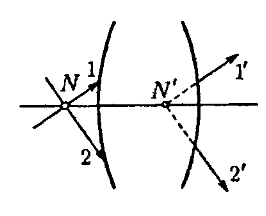


Рис. 3.18

Расстояние между узлами всегда равно расстоянию между главными точками. В случае, когда оптические свойства сред, находящихся по обе стороны системы, одинаковы (т. е. $n = n'$), узлы совпадают с главными точками.

Фокусные расстояния и оптическая сила системы. Расстояние от передней главной точки H до переднего фокуса F называется **передним фокусным расстоянием** f системы. Расстояние от H' до F' именуется **задним фокусным расстоянием** f'. Фокусные расстояния f и f' — алгебраические величины. Они положительны, если данный фокус лежит справа от соответствующей главной точки, и отрицательны в противном случае. Например, для системы, изображенной на рис. 3.19,

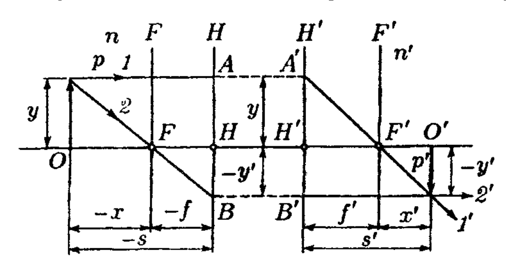


Рис. 3.19

заднее фокусное расстояние f' положительно, а переднее фокусное расстояние f отрицательно. На рисунке указана истинная длина отрезка HF, т. е. положительная величина $-f$, равная модулю f.

Можно доказать, что между фокусными расстояниями f и f' центрированной оптической системы, образованной сферическими преломляющими поверхностями, имеется соотношение

$$\frac{f}{f'} = -\frac{n}{n'}, \tag{3.59}$$

где n — показатель преломления среды, находящейся перед оптической системой, n' — показатель преломления среды, находящейся за системой. Из (3.59) вытекает, что в случае, когда показатели преломления сред, находящихся по обе стороны оптической системы, одинаковы фокусные расстояния отличаются только знаком:

$$f' = -f. \tag{3.60}$$

Величина

$$\Phi = \frac{n'}{f'} = -\frac{n}{f} \tag{3.61}$$

называется оптической силой системы. Чем больше Φ, тем меньше фокусное расстояние f' и, следовательно, тем сильнее преломляются лучи оптической системой. Оптическая сила измеряется в диоптриях (дптр). Чтобы получить Φ в диоптриях, фокусное расстояние в формуле (3.61) нужно взять в метрах. При положительной Φ заднее фокусное расстояние f' также положительно; следовательно, система дает действительное изображение бесконечно удаленной точки — параллельный пучок лучей превращается в сходящийся. В этом случае система называется собирающей. При отрицательной Φ изображение бесконечно удаленной точки будет мнимым — параллельный пучок лучей превращается системой в расходящийся. Такая система именуется рассеивающей.

Формула системы. Задание кардинальных плоскостей или точек полностью определяет свойства оптической системы. В частности, зная положение кардинальных плоскостей, можно построить оптическое изображение, даваемое системой. Возьмем в пространстве предметов отрезок OP, перпендикулярный к оптической оси (рис. 3.19; узлы на рисунке не показаны). Положение этого отрезка можно задать либо расстоянием x, отсчитанным от точки F до точки O, либо расстоянием s от H до O. Величины x и s, как и фокусные расстояния f и f', являются алгебраическими (на рисунках указываются их модули).

Проведем из точки P луч *1*, параллельный оптической оси. Он пересечет плоскость H в точке A. В соответствии со свойствами главных плоскостей сопряженный лучу *1* луч *1'* должен проходить через сопряженную с точкой A точку A' плоскости H'. Так как луч *1* параллелен оптической оси, сопряженный с ним луч *1'* пройдет через задний фокус f'. Теперь проведем из точки P луч *2*, проходящий через передний фокус F. Он пересечет плоскость H в точке B. Сопряженный с ним луч *2'* пройдет через сопряженную с B точку B' плоскости H' и будет параллельным оптической оси. Точка P' пересечения лучей *1'* и *2'* представляет собой изображение точки P. Изображение $O'P'$, как и отрезок OP, перпендикулярно к оптической оси.

Положение изображения $O'P'$ можно охарактеризовать либо расстоянием x' от точки F' до точки O', либо расстоянием s' от H' до O'. Величины x' и s' являются алгебраическими. В случае, изображенном на рис. 3.19, они положительны.

Величина x', определяющая положение изображения, закономерно связана с величиной x, определяющей положение предмета, и с фокусными расстояниями f и f'. Для прямоугольных треугольников с общей вершиной в точке F (см. рис. 3.19) можно написать соотношение

$$\frac{OP}{HB} = \frac{y}{-y'} = \frac{-x}{-f}. \tag{3.62}$$

Аналогично для треугольников с общей вершиной в точке F' имеем

$$\frac{H'A'}{O'P'} = \frac{y}{-y'} = \frac{f'}{x'}. \tag{3.63}$$

Объединив оба соотношения, получим, что $(-x)/(-f) = f'/x'$, откуда

$$xx' = ff'. \tag{3.64}$$

Это равенство называется формулой Ньютона. При условии, что $n = n'$, формула Ньютона имеет вид

$$xx' = -f^2 \tag{3.65}$$

(см. (3.59)).

От формулы, связывающей расстояния x и x' предмета и изображения от фокусов системы, легко перейти к формуле, устанавливающей связь между расстояниями s и s' от главных точек. Из рис. 3.19 видно, что $-x = (-s) - (-f)$ (т. е. $x = s - f$), $x' = s' - f'$. Подставив эти выражения для x и x' в формулу (3.64) и произведя преобразования, получим

$$\frac{f}{s} + \frac{f'}{s'} = 1. \tag{3.66}$$

При выполнении условия $f' = -f$ (см. (3.60)) формула (3.66) упрощается следующим образом:

$$\frac{1}{s} - \frac{1}{s'} = \frac{1}{f}. \tag{3.67}$$

Соотношения (3.64)–(3.67) представляют собой формулы центрированной оптической системы.

3.8. Тонкая линза

Простейшей центрированной оптической системой является линза. Она представляет собой прозрачное (обычно стеклянное) тело, ограниченное двумя сферическими поверхностями[7] (в частном случае одна из поверхностей может быть плоской). Точки пересечения поверхностей с оптической осью линзы называются вершинами преломляющих поверхностей. Расстояние между вершинами именуется толщиной линзы. Если толщиной линзы можно пренебречь по сравнению с меньшим из радиусов кривизны ограничивающих линзу поверхностей, линза называется тонкой.

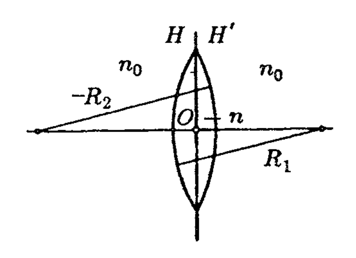


Рис. 3.20

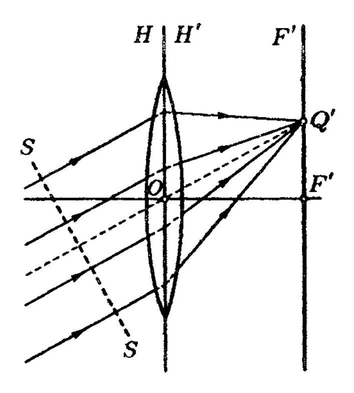


Рис. 3.21

Расчеты, которых мы не приводим, дают, что в случае тонкой линзы главные плоскости H и H' можно считать совпадающими и проходящими через центр линзы O (рис. 3.20). Для фокусных расстояний тонкой линзы получается выражение

$$f' = -f = \frac{n_0}{n - n_0}\frac{R_1 R_2}{R_2 - R_1}; \qquad (3.68)$$

здесь n — показатель преломления линзы, n_0 — показатель преломления среды, окружающей линзу, R_1 и R_2 — радиусы кривизны поверхностей линзы. С радиусами кривизны нужно обращаться, как с алгебраическими величинами: для выпуклой поверхности (т. е. в случае, когда центр кривизны лежит справа от вершины) радиус кривизны нужно считать положительным, для вогнутой по-

[7]) Бывают линзы с поверхностями более сложной формы.

верхности (т. е. в случае, когда центр кривизны лежит слева от вершины) радиус нужно считать отрицательным. На чертежах указывается модуль радиуса кривизны, т. е. $-R$, если $R < 0$.

Если показатели преломления сред, находящихся по обе стороны тонкой линзы, одинаковы, то узлы N и N' совпадают с главными точками, т. е. помещаются в центре линзы O. Следовательно, в этом случае любой луч, идущий через центр линзы, не изменяет своего направления. Если показатель преломления сред перед и за линзой неодинаковы, узлы не совпадают с главными точками, так что луч, идущий через центр линзы, претерпевает излом.

Параллельный пучок лучей после прохождения через линзу собирается в одной из точек фокальной плоскости (см. точку Q' на рис. 3.21). Чтобы определить положение этой точки, нужно продолжить идущий через центр линзы луч до пересечения его с фокальной плоскостью (см. штриховой луч OQ'). В точке пересечения соберутся и остальные лучи. Такой способ пригоден в том случае, если оптические свойства среды по обе стороны линзы одинаковы ($n = n'$). В противном случае луч, идущий через центр, терпит излом. Для нахождения точки Q' в этом случае нужно знать положение узловых точек линзы.

Отметим, что отложенные вдоль лучей пути, начинающиеся на волновой поверхности SS (см. рис. 3.21) и заканчивающиеся в точке Q', имеют одинаковую оптическую длину и являются таутохронными (см. конец § 3.6).

В заключение надо сказать, что линза является далеко не идеальной оптической системой. Даваемые ею изображения предметов обладают рядом погрешностей. Однако рассмотрение этих погрешностей выходит за рамки данной книги.

3.9. Принцип Гюйгенса[8])

В двух следующих главах нам придется рассматривать процессы, происходящие за непрозрачной преградой с отверстиями в случае, когда на эту преграду падает световая волна. В приближении геометрической оптики свет за преградой не должен проникать в область геометрической тени. В действительности же световая волна в прин-

[8])Христиан Гюйгенс (1629–1695) — нидерландский ученый.

ципе распространяется во всем пространстве за преградой, проникая в область геометрической тени, причем это проникновение оказывается тем более существенным, чем меньше размеры отверстий. При диаметре отверстий или ширине щелей, сравниваемых с длиной световой волны, приближение геометрической оптики оказывается совершенно неправомерным.

Качественно поведение света за преградой с отверстием может быть объяснено с помощью *принципа Гюйгенса*, который устанавливает способ построения фронта волны в момент времени $t + \Delta t$ по известному положению фронта в момент времени t. Согласно принципу Гюйгенса каждая точка, до которой доходит волновое движение, служит центром вторичных волн; огибающая этих волн дает положение фронта волны в следующий момент (рис. 3.22; среда предполагается неоднородной — скорость волны в нижней части рисунка больше, чем в верхней).

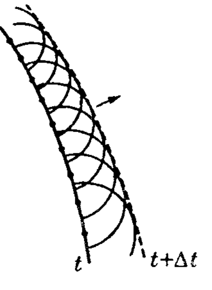


Рис. 3.22

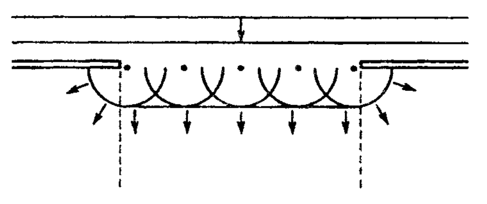


Рис. 3.23

Пусть на плоскую преграду с отверстием падает параллельный ей фронт волны (рис. 3.23). По Гюйгенсу каждая точка выделяемого отверстием участка волнового фронта служит центром вторичных волн, которые в однородной и изотропной среде будут сферическими. Построив огибающую вторичных волн, мы убеждаемся в том, что за отверстием волна проникает в область геометрической тени (на рисунке границы этой области показаны штриховыми линиями), огибая края преграды.

Принцип Гюйгенса не дает никаких указаний об интенсивности волн, распространяющихся в различных направлениях. Этот недостаток был устранен Френелем [9]). Усовершенствованный им *принцип Гюйгенса–Френеля* излагается в § 5.2. Там же дается физическое обоснование этого принципа.

[9]) Огюстен Жан Френель (1788–1827) — французский физик.

Глава 4

Интерференция света

4.1. Интерференция световых волн

Пусть две волны одинаковой частоты, накладываясь друг на друга, возбуждают в некоторой точке пространства колебания одинакового направления:

$$A_1\cos(\omega t+\alpha_1),\quad A_2\cos(\omega t+\alpha_2).$$

Амплитуда результирующего колебания в данной точке определяется выражением

$$A^2=A_1^2+A_2^2+2A_1A_2\cos\delta,$$

где $\delta=\alpha_2-\alpha_1$ (см. формулу (8.84) кн. 1).

Если разность фаз δ возбуждаемых волнами колебаний остается постоянной во времени, то волны называются когерентными[1].

В случае некогерентных волн δ непрерывно изменяется, принимая с равной вероятностью любые значения, вследствие чего среднее по времени значение $\cos\delta$ равно нулю. Поэтому

$$\langle A^2\rangle=\langle A_1^2\rangle+\langle A_2^2\rangle.$$

Отсюда, приняв во внимание соотношение (3.10), приходим к выводу, что интенсивность, наблюдаемая при наложении некогерентных волн, равна сумме интенсивностей, создаваемых каждой из волн в отдельности:

$$I=I_1+I_2. \tag{4.1}$$

В случае когерентных волн $\cos\delta$ имеет постоянное во времени (но свое для каждой точки пространства) значение, так что

$$I=I_1+I_2+2\sqrt{I_1I_2}\cos\delta. \tag{4.2}$$

---

[1]) В следующем параграфе мы обсудим понятие когерентности более подробно.

В тех точках пространства, для которых $\cos\delta > 0$, I будет превышать $I_1 + I_2$; в точках, для которых $\cos\delta < 0$, I будет меньше $I_1 + I_2$. Таким образом, при наложении когерентных световых волн происходит перераспределение светового потока в пространстве, в результате чего в одних местах возникают максимумы, а в других — минимумы интенсивности. Это явление называется интерференцией волн. Особенно отчетливо проявляется интерференция в том случае, когда интенсивность обеих интерферирующих волн одинакова: $I_1 = I_2$. Тогда согласно (4.2) в максимумах $I = 4I_1$, в минимумах же $I = 0$. Для некогерентных волн при том же условии получается всюду одинаковая интенсивность $I = 2I_1$ (см. (4.1)).

Из сказанного вытекает, что при освещении какой-либо поверхности несколькими источниками света (например, двумя лампочками) должна, казалось бы, наблюдаться интерференционная картина с характерным для нее чередованием максимумов и минимумов интенсивности. Однако из повседневного опыта известно, что в указанном случае освещенность поверхности монотонно убывает по мере удаления от источников света и никакой интерференционной картины не наблюдается. Это объясняется тем, что естественные источники света не когерентны.

Некогерентность естественных источников света обусловлена тем, что излучение светящегося тела слагается из волн, испускаемых многими атомами. Отдельные атомы излучают цуги волн длительностью порядка 10^{-8} с и протяженностью около 3 м (см. § 3.1). Фаза нового цуга никак не связана с фазой предыдущего цуга. В испускаемой телом световой волне излучение одной группы атомов через время порядка 10^{-8} с сменяется излучением другой группы, причем фаза результирующей волны претерпевает случайные изменения.

Когерентные световые волны можно получить, разделив (с помощью отражений или преломлений) волну, излучаемую одним источником, на две части. Если заставить эти две волны пройти разные оптические пути, а потом наложить их одна на другую, наблюдается интерференция. Разность оптических длин путей, проходимых интерферирующими волнами, не должна быть очень большой, так как складывающиеся колебания должны принадлежать одному и тому же результирующему цугу волн. Если эта разность будет порядка 1 м, наложатся коле-

бания, соответствующие разным цугам, и разность фаз между ними будет непрерывно меняться хаотическим образом.

Пусть разделение на две когерентные волны происходит в точке O (рис. 4.1). До точки P первая волна проходит в среде с показателем преломления n_1 путь s_1, вторая волна проходит в среде с показателем преломления n_2 путь s_2. Если в точке O фаза колебания равна ωt, то первая волна возбудит в точке P колебание $A_1 \cos[\omega(t - s_1/v_1)]$, а вторая волна — колебание $A_2 \cos[\omega(t - s_2/v_2)]$ ($v_1 = c/n_1$ и $v_2 = c/n_2$ — фазовые скорости волн). Следовательно, разность фаз колебаний, возбуждаемых волнами в точке P, будет равна

$$\delta = \omega\left(\frac{s_2}{v_2} - \frac{s_1}{v_1}\right) = \frac{\omega}{c}(n_2 s_2 - n_1 s_1).$$

Заменив ω/c на $2\pi\nu/c = 2\pi/\lambda_0$ (λ_0 — длины волны в вакууме), выражению для разности фаз можно придать вид

$$\delta = \frac{2\pi}{\lambda_0}\Delta, \tag{4.3}$$

где

$$\Delta = n_2 s_2 - n_1 s_1 = L_2 - L_1 \tag{4.4}$$

есть величина, равная разности оптических длин проходимых волнами путей и называемая **оптической разностью хода** (ср. с формулой (3.57)).

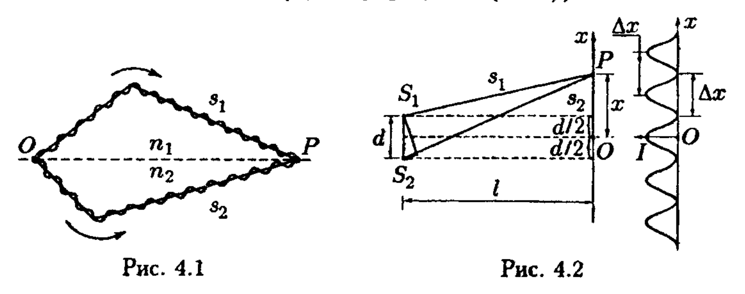


Рис. 4.1

Рис. 4.2

Из формулы (4.3) видно, что если оптическая разность хода равна целому числу длин волн в вакууме,

$$\Delta = \pm m\lambda_0 \quad (m = 0, 1, 2, \ldots), \tag{4.5}$$

то разность фаз δ оказывается кратной 2π и колебания возбуждаемые в точке P обеими волнами, будет происходить с одинаковой фазой. Таким образом, (4.5) есть условие интерференционного максимума.

Если Δ равна полуцелому числу длин волн в вакууме,

$$\Delta = \pm(m + 1/2)\lambda_0 \quad (m = 0, 1, 2, \ldots), \tag{4.6}$$

то $\delta = \pm(2m + 1)\pi$, так что колебания в точке P находятся в противофазе. Следовательно, (4.6) есть условие интерференционного минимума.

Рассмотрим две цилиндрические когерентные световые волны, исходящие из источников S_1 и S_2, имеющих вид параллельных тонких светящихся нитей или узких щелей (рис. 4.2). Область, в которой эти волны перекрываются, называется полем интерференции. Во всей этой области наблюдается чередованием мест с максимальной и минимальной интенсивностью света. Если в поле интерференции внести экран, то на нем будет видна интерференционная картина, которая имеет вид чередующихся светлых и темных полос. Вычислим ширину этих полос в предположении, что экран параллелен плоскости, проходящей через источники S_1 и S_2. Положение точки на экране будем характеризовать координатой x, отсчитываемой в направлении, перпендикулярном к линиям S_1 и S_2. Начало отсчета выберем в точке O, относительно которой S_1 и S_2 расположены симметрично. Источники будем считать колеблющимися в одинаковой фазе. Из рис. 4.2 видно, что

$$s_1^2 = l^2 + (x - d/2)^2, \quad s_2^2 = l^2 + (x + d/2)^2.$$

Следовательно,

$$s_2^2 - s_1^2 = (s_2 + s_1)(s_2 - s_1) = 2xd.$$

Ниже будет выяснено, что для получения различимой интерференционной картины расстояние между источниками d должно быть значительно меньше расстояния до экрана l. Расстояние x, в пределах которого образуются интерференционной полосы, также бывает значительно меньше l. При этих условиях можно положить $s_2 + s_1 \approx 2l$. Тогда $s_2 - s_1 = xd/l$. Умножив $s_2 - s_1$ на показатель преломления среды n, получим оптическую разность хода

$$\Delta = n\frac{xd}{l}. \tag{4.7}$$

Подстановка этого значения Δ в условие (4.5) показывает, что максимумы интенсивности будут наблюдаться при значениях x, равных

$$x_{\max} = \pm m\frac{l}{d}\lambda \quad (m = 0, 1, 2, \ldots). \tag{4.8}$$

Здесь $\lambda = \lambda_0/n$ — длина волны в среде, заполняющей пространство между источниками и экраном.

Подставив значение (4.7) в условие (4.6), получим координаты минимумов интенсивности:

$$x_{\min} = \pm\left(m + \frac{1}{2}\right)\frac{l}{d}\lambda \quad (m = 0, 1, 2, \ldots). \tag{4.9}$$

Назовем расстояние между двумя соседними максимумами интенсивности **расстоянием между интерференционными полосами**, а расстояние между соседними минимумами интенсивности — **шириной интерференционной полосы**. Из формул (4.8) и (4.9) следует, что расстояние между полосами и ширина полосы имеют одинаковое значение, равное

$$\Delta x = \frac{l}{d}\lambda. \tag{4.10}$$

Согласно формуле (4.10) расстояние между полосами растет с уменьшением расстояния между источниками d. При d, сравнимом с l, расстояние между полосами было бы того же порядка, что и λ, т. е. составляло бы несколько десятых микрометра. В этом случае отдельные полосы были бы совершенно неразличимы. Для того чтобы интерференционная картина стала отчетливой, необходимо соблюдение упоминавшегося выше условия: $d \ll l$.

Если интенсивность интерферирующих волн одинакова ($I_1 = I_2 = I_0$), то согласно (4.2) результирующая интенсивность в точках, для которых разность фаз равна δ, определяется выражением

$$I = 2I_0(1 + \cos\delta) = 4I_0\cos^2(\delta/2).$$

Поскольку $\delta \sim \Delta$, то в соответствии с (4.7) δ растет пропорционально x. Следовательно, интенсивность изменяется вдоль экрана по закону квадрата косинуса. Справа на рис. 4.2 показана зависимость I от x, получающаяся в монохроматическом свете.

Ширина интерференционных полос и расстояние между ними зависят от длины волны λ. Только в центре картины, при $x = 0$, совпадут максимумы всех длин волн.

По мере удаления от центра картины максимумы разных цветов смещаются относительно друг друга все больше и больше. Это приводит к смазыванию интерференционной картины при наблюдении ее в белом свете. В монохроматическом свете число различимых полос интерференции заметно возрастает.

Измерив расстояние между полосами Δx и зная l и d, можно по формуле (4.10) вычислить λ. Именно из опытов по интерференции света были впервые определены длины волн для световых лучей разного цвета.

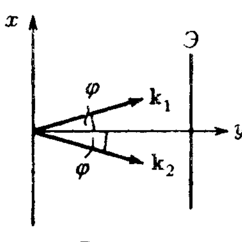


Рис. 4.3

Мы рассмотрели интерференцию двух цилиндрических волн. Выясним теперь, что происходит при наложении двух плоских волн. Пусть амплитуды этих волн одинаковы, а направления их распространения образуют угол 2φ (рис. 4.3). Направления колебаний светового вектора будем считать перпендикулярными к плоскости рисунка. Волновые векторы $\mathbf{k}_1$ и $\mathbf{k}_2$ лежат в плоскости рисунка и имеют одинаковый модуль, равный $k = 2\pi/\lambda$. Напишем уравнения этих волн:

$$A\cos(\omega t - \mathbf{k}_1\mathbf{r}) = A\cos(\omega t - k\sin\varphi\cdot x - k\cos\varphi\cdot y),$$

$$A\cos(\omega t - \mathbf{k}_2\mathbf{r}) = A\cos(\omega t + k\sin\varphi\cdot x - k\cos\varphi\cdot y).$$

Результирующее колебание в точках с координатами x и y имеет вид

$$A\cos(\omega t - k\sin\varphi\cdot x - k\cos\varphi\cdot y)+ +A\cos(\omega t + k\sin\varphi\cdot x - k\cos\varphi\cdot y) = = 2A\cos(k\sin\varphi\cdot x)\cos(\omega t - k\cos\varphi\cdot y). \quad (4.11)$$

Из этого выражения следует, что в точках, где $k\sin\varphi\times\times x = \pm m\pi$ $(m = 0, 1, 2, \ldots)$, амплитуда колебаний равна $2A$; в точках же, где $k\sin\varphi\cdot x = \pm(m + 1/2)\pi$, амплитуда колебаний равна нулю. Где бы мы ни расположили экран $Э$, перпендикулярный к оси y, на нем будет наблюдаться система чередующихся светлых и темных полос, параллельных оси z (эта ось перпендикулярна к плоскости рисунка). Координаты максимумов интенсивности будут равны

$$x_{max} = \pm\frac{m\pi}{k\sin\varphi} = \pm\frac{m\lambda}{2\sin\varphi}. \quad (4.12)$$

От положения экрана (от координаты y) зависит лишь фаза колебаний (см. (4.11)).

Мы положили для простоты начальные фазы интерферирующих волн равными нулю. Если разность этих фаз отлична от нуля, в формуле (4.12) появится постоянное слагаемое — картина полос сдвинется вдоль экрана.

4.2. Когерентность

Когерентностью называется согласованное протекание нескольких колебательных или волновых процессов. Степень согласованности может быть различной. Соответственно можно ввести понятие степени когерентности двух волн.

Различают временную и пространственную когерентность. Мы начнем с рассмотрения временной когерентности.

Временная когерентность. Описанный в предыдущем параграфе процесс интерференции является идеализированным. В действительности этот процесс гораздо более сложен. Это обусловлено тем, что монохроматическая волна, описываемая выражением

$$A\cos(\omega t - kr + \alpha),$$

где A, ω и α — константы, представляет собой абстракцию. Всякая реальная световая волна образуется наложением колебаний всевозможных частот (или длин волн), заключенных в более или менее узком, но конечном интервале частот $\Delta\omega$ (соответственно длин волн $\Delta\lambda$). Даже для квазимонохроматического света (см. с. 71) интервал частот $\Delta\omega$ является конечным[2]. Кроме того, амплитуда волны A и фаза α претерпевают со временем непрерывные случайные (хаотические) изменения. Поэтому колебания, возбуждаемые в некоторой точке пространства двумя накладывающимися друг на друга световыми волнами, имеют вид

$$A_1(t)\cos[\omega_1(t)t + \alpha_1(t)], \quad A_2(t)\cos[\omega_2(t)t + \alpha_2(t)], \qquad (4.13)$$

причем хаотические изменения функций $A_1(t)$, $\omega_1(t)$, $\alpha_1(t)$, $A_2(t)$, $\omega_2(t)$ и $\alpha_2(t)$ являются совершенно независимыми.

---

[2]) Испускаемые атомами спектральные линии имеют «естественную» ширину $\Delta\omega$ порядка 10^8 с$^{-1}$ ($\Delta\lambda \sim 10^{-4}$ Å).

Для простоты будем считать амплитуды A_1 и A_2 постоянными. Изменения частоты и фазы можно свести либо к изменению одной лишь фазы, либо к изменению одной лишь частоты. Представим функцию

$$f(t) = A\cos\left[\omega(t)t + \alpha(t)\right] \tag{4.14}$$

в виде

$$f(t) = A\cos\left[\omega_0 t + [\omega(t) - \omega_0]t + \alpha(t)\right],$$

где ω_0 — некоторое среднее значение частоты, и введем обозначение: $[\omega(t) - \omega_0]t + \alpha(t) = \alpha'(t)$. Тогда формула (4.14) примет вид

$$f(t) = A\cos\left[\omega_0 t + \alpha'(t)\right]. \tag{4.15}$$

Мы получили функцию, у которой хаотические изменения претерпевает лишь фаза колебания.

С другой стороны, в математике доказывается, что негармоническую функцию, например функцию (4.14), можно представить в виде суммы гармонических функций с частотами, заключенными в некотором интервале $\Delta\omega$ (см. формулу (4.16)).

Таким образом, при рассмотрении вопроса о когерентности возможны два подхода — «фазовый» и «частотный» . Начнем с «фазового» подхода. Допустим, что частоты ω_1 и ω_2 в формулах (4.13) удовлетворяют условию $\omega_1 = \omega_2 = \text{const}$, и выясним, какое влияние оказывает изменение фаз α_1 и α_2. В соответствии с формулой (4.2) интенсивность света в данной точке определяется выражением

$$I = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2}\cos\delta(t).$$

где $\delta(t) = \alpha_2(t) - \alpha_1(t)$. Последнее слагаемое в этой формуле носит название *интерференционного члена*.

Всякий прибор, с помощью которого можно наблюдать интерференционную картину (глаз [3]), фотопластинка и т. п.), обладает некоторой инерционностью. В связи с этим он регистрирует картину, усредненную по некоторому промежутку времени Δt. Если за время Δt множитель $\cos\delta(t)$ принимает все значения от -1 до $+1$, среднее значение итерференционного члена будет равно нулю. Поэтому регистрируемая прибором интенсивность окажется

[3]) Напомним, что демонстрирование кинофильмов основано на инерционности зрительного восприятия, которая составляет примерно 0,1 с.

равной сумме интенсивностей, создаваемых в данной точке каждой из волн в отдельности, — интерференция отсутствует. Если же за время Δt значение $\cos\delta(t)$ изменяется мало, прибор обнаружит интерференцию.

Пусть некоторая величина x изменяется скачками, равными b, причем приращения $+b$ и $-b$ являются равновероятными. Такое поведение величины называется случайными блужданиями. Положим начальное значение x равным нулю. Если после N шагов величина равна x_N, то после $(N+1)$-го шага она будет равна $x_{N+1} = x_N \pm b$, причем оба знака равновероятны. Допустим, что случайные блуждания совершаются многократно, начинаясь каждый раз с $x = 0$, и найдем среднее значение x^2_{N+1}. Оно равно $\langle x^2_{N+1}\rangle = \langle x^2_N\rangle + \langle \pm 2x_N b\rangle + \langle b^2\rangle = \langle x^2_N\rangle + b^2$ (удвоенное произведение при усреднении исчезает). Следовательно, независимо от значения N среднее значение x^2 увеличивается на b^2. Поэтому $\langle x^2_{N+1}\rangle = Nb^2$. Таким образом, величина, совершающая случайные блуждания, в среднем все больше удаляется от первоначального значения.

Фаза волны, образованной наложением огромного числа цугов, порождаемых отдельными атомами, не может совершать больших скачков. Она изменяется случайным образом небольшими шагами, т. е. совершает случайные блуждания. Время $t_{\text{ког}}$, за которое случайное изменение фазы волны $\alpha(t)$ достигает значения порядка π, называется *временем когерентности*. За это время колебание как бы забывает свою первоначальную фазу и становится некогерентным по отношению к самому себе.

Для примера укажем, что квазимонохроматический свет, содержащий длины волн в интервале $\Delta\lambda = 1$ нм, характеризуется $t_{\text{ког}}$ порядка 10^{-12} с. Излучение гелий-неонового лазера обладает $t_{\text{ког}}$ порядка 10^{-3} с.

Расстояние $l_{\text{ког}} = ct_{\text{ког}}$, на которое перемещается волна за время $t_{\text{ког}}$, называется *длиной когерентности* (или *длиной цуга*). Длина когерентности есть то расстояние, на котором случайное изменение фазы достигает значения порядка π. Для получения интерференционной картины путем деления естественной волны на две части необходимо, чтобы оптическая разность хода Δ была меньше, чем длина когерентности. Это требование ограничивает число видимых интерференционных полос, наблюдаемых по схеме, изображенной на рис. 4.2. С увеличением номера полосы разность хода ра-

стет, вследствие чего четкость полос делается все хуже и хуже.

Перейдем к выяснению роли немонохроматичности световых волн. Допустим, что свет состоит из последовательности идентичных цугов частоты ω_0 и длительности τ. При смене одного цуга другим фаза претерпевает беспорядочные изменения, вследствие чего цуги оказываются взаимно некогерентными. При этих предположениях длительность цуга τ практически совпадает со временем когерентности $t_{\text{ког}}$.

В математике доказывается теорема Фурье, согласно которой любую конечную и интегрируемую функцию $F(t)$ можно представить в виде суммы бесконечного числа гармонических составляющих с непрерывно изменяющейся частотой:

$$F(t) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} A(\omega) \exp(i\omega t)\, d\omega. \qquad (4.16)$$

Выражение (4.16) называется интегралом Фурье. Стоящая под знаком интеграла функция $A(\omega)$ представляет собой амплитуду соответствующей монохроматической составляющей. Согласно теории интегралов Фурье аналитический вид функции $A(\omega)$ определяется выраженем

$$A(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} F(\xi) \exp(-i\omega\xi)\, d\xi, \qquad (4.17)$$

где ξ — вспомогательная переменная интегрирования.

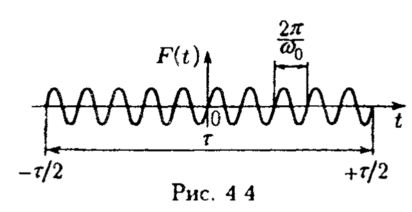


Рис. 4 4

Пусть функция $F(t)$ описывает световое возмущение в некоторой точке в момент времени t, вызванное одиночным волновым цугом. Тогда она определяется условиями

$$F(t) = A_0 \exp(i\omega_0 t) \quad \text{при} \quad |t| \le \tau/2,$$
$$F(t) = 0 \quad \text{при} \quad |t| > \tau/2.$$

График вещественной части этой функции дан на рис. 4.4

Вне интервала от $-\tau/2$ до $+\tau/2$ функция $F(t)$ равна нулю. Поэтому выражение (4.17), определяющее амплитуды гармонических составляющих, имеет вид

$$A(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\tau/2}^{+\tau/2} [A_0 \exp(i\omega_0\xi)] \exp(-i\omega\xi)\, d\xi =$$

$$= \frac{1}{2\pi} A_0 \int\limits_{-\tau/2}^{+\tau/2} \exp[i(\omega_0 - \omega)\xi]\, d\xi =$$

$$= \frac{1}{2\pi} A_0 \left. \frac{\exp[i(\omega_0 - \omega)\xi]}{i(\omega_0 - \omega)} \right|_{-\tau/2}^{+\tau/2}.$$

После подстановки пределов интегрирования и несложных преобразований приходим к формуле

$$A(\omega) = \frac{1}{2\pi} A_0 \tau \frac{\sin[(\omega - \omega_0)\tau/2]}{(\omega - \omega_0)\tau/2}.$$

Интенсивность $I(\omega)$ гармонической составляющей волны пропорциональна квадрату амплитуды, т. е. выражению

$$f(\omega) = \frac{\sin^2[(\omega - \omega_0)\tau/2]}{[(\omega - \omega_0)\tau/2]^2}. \tag{4.18}$$

График функции (4.18) показан на рис. 4.5. Из рисунка видно, что интенсивность составляющих, частоты кото-

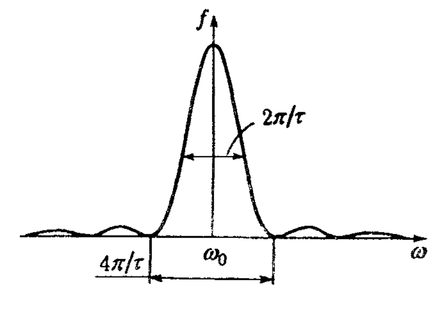


Рис. 4.5

рых заключены в интервале $\Delta\omega = 2\pi/\tau$, значительно превосходит интенсивность отдельных составляющих. Это

обстоятельство позволяет связать длительность цуга τ с эффективным частотным диапазоном $\Delta\omega$ фурье-спектра:

$$\tau = \frac{2\pi}{\Delta\omega} = \frac{1}{\Delta\nu}.$$

Отождествив τ со временем когерентности, придем к соотношению

$$t_{\text{ког}} \sim \frac{1}{\Delta\nu} \tag{4.19}$$

(знак $\sim$ означает: «по порядку величины равно»).

Из соотношения (4.19) следует, что чем шире интервал частот, представленных в данной световой волне, тем меньше время когерентности этой волны.

Частота связана с длиной волны в вакууме соотношением $\nu = c/\lambda_0$. Продифференцировав это соотношение, найдем, что $\Delta\nu = c\Delta\lambda_0/\lambda_0^2 \approx c\Delta\lambda/\lambda^2$ (знак минус, получающийся при дифференцировании, мы опустили, кроме того, положили $\lambda_0 \approx \lambda$). Заменив в формуле (4.19) $\Delta\nu$ его выражением через λ и $\Delta\lambda$, получим для времени когерентности выражение

$$t_{\text{ког}} \sim \frac{\lambda^2}{c\Delta\lambda}. \tag{4.20}$$

Отсюда для длины когерентности получается следующее значение:

$$l_{\text{ког}} = ct_{\text{ког}} \sim \lambda^2/\Delta\lambda. \tag{4.21}$$

Из формулы (4.5) вытекает, что разность хода, при которой получается максимум m-го порядка, определяется соотношением

$$\Delta_m = \pm m\lambda_0 \approx \pm m\lambda.$$

Когда эта разность хода достигает значения порядка длины когерентности, полосы становятся неразличимыми. Следовательно, предельный наблюдаемый порядок интерференции определяется условием

$$m_{\text{пред}}\lambda \sim l_{\text{ког}} \sim \lambda^2/\Delta\lambda,$$

откуда

$$m_{\text{пред}} \sim \lambda/\Delta\lambda. \tag{4.22}$$

Из (4.22) следует, что число интерференционных полос, наблюдаемых по схеме, изображенной на рис. 4.2, возрастает при уменьшении интервала длин волн, представленных в используемом свете.

Пространственная когерентность. Согласно формуле $k = \omega/v = n\omega/c$ разбросу частот $\Delta\omega$ соответствует разброс значений k. Мы установили, что временная когерентность определяется значением $\Delta\omega$. Следовательно, временная когерентность связана с разбросом значений модуля волнового вектора $\mathbf{k}$. Пространственная когерентность связана с разбросом направлений вектора $\mathbf{k}$, который характеризуется величиной $\Delta\mathbf{e}_k$.

Возникновение в некоторой точке пространства колебаний, возбуждаемых волнами с разными $\mathbf{e}_k$, возможно в том случае, если эти волны испускаются разными участками протяженного (неточечного) источника света. Допустим для простоты, что источник имеет форму диска, видимого из данной точки под углом φ. Из рис. 4.6 видно, что угол φ характеризует интервал, в котором заключены орты $\mathbf{e}_k$. Будем считать этот угол малым.

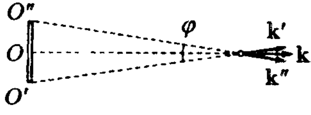


Рис. 4.6

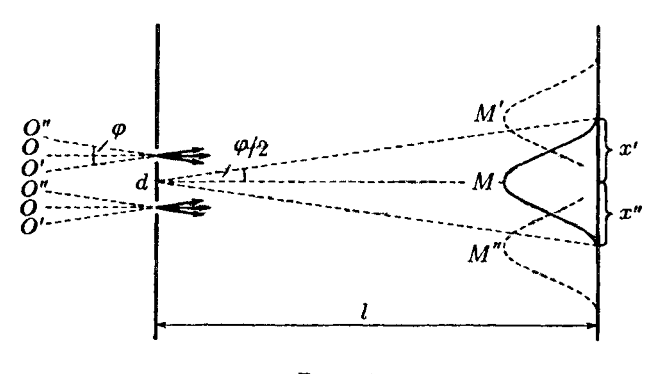


Рис. 4.7

Пусть свет от источника падает на две узкие щели, за которыми находится экран (рис. 4.7). Интервал частот, испускаемых источником, будем считать очень малым, для того чтобы степень временной когерентности была достаточной для получения четкой интерференционной картины. Волна, пришедшая от участка поверхности, обозначенного на рис. 4.7 через O, создает нулевой максимум M в середине экрана. Нулевой максимум M', созданный волной, пришедшей от участка O', будет смещен от середины экрана на расстояние x'. Вследствие мало-

сти угла φ и отношения d/l можно считать, что $x' = l\varphi/2$. Нулевой максимум M'', созданный волной, пришедшей от участка O'', смещен от середины экрана в противоположную сторону на расстояние x'', равное x'. Нулевые максимумы от остальных участков источника располагаются между максимумами M' и M''.

Отдельные участки источника света возбуждают волны, фазы которых никак не связаны между собой. Поэтому интерференционная картина, возникающая на экране, будет наложением картин, создаваемых каждым из участков в отдельности. Если смещение x' много меньше ширины интерференционной полосы $\Delta x = l\lambda/d$ (см. формулу (4.10)), максимумы от разных участков источника практически наложатся друг на друга и картина будет такой, как от точечного источника. При $x' \approx \Delta x$ максимумы от одних участков придутся на минимумы от других, и интерференционная картина наблюдаться не будет. Таким образом, интерференционная картина будет различимой при условии, что $x' < \Delta x$, т. е.

$$\frac{l\varphi}{2} < \frac{l\lambda}{d}, \tag{4.23}$$

или

$$\varphi < \lambda/d. \tag{4.24}$$

При переходе от (4.23) к (4.24) мы опустили множитель 2.

Формула (4.24) определяет угловые размеры источника, при которых наблюдается интерференция. Из этой формулы можно также определить наибольшее расстояние между щелями, при котором можно еще наблюдать интерференцию от источника с угловым размером φ. Умножив неравенство (4.24) на d/φ, придем к условию

$$d < \lambda/\varphi. \tag{4.25}$$

Совокупность волн с разными $\mathbf{e}_k$ можно заменить результирующей волной, падающей на экран со щелями. Отсутствие интерференционной картины означает, что колебания, возбуждаемые этой волной в местах нахождения первой и второй щелей, некогерентны. Следовательно, и колебания в самой волне в точках, находящихся на расстоянии d друг от друга, являются некогерентными. Если бы источник был идеально монохроматическим (это значит, что $\Delta\nu = 0$ и $t_{\text{ког}} = \infty$), поверхность, проходящая

через щели, была бы волновой и колебания во всех точках этой поверхности происходили бы в одинаковой фазе. Мы установили, что в случае $\Delta\nu \neq 0$ и конечных размеров источника ($\varphi \neq 0$) колебания в точках поверхности, отстоящих на расстояние $d > \lambda/\varphi$, некогерентны.

Поверхность, которая была бы волновой при условии монохроматичности источника, будем для краткости называть псевдоволновой[4]). Мы могли бы удовлетворить условию (4.24), уменьшив расстояние между щелями d, т. е. взяв более близкие точки псевдоволновой поверхности. Следовательно, колебания, возбуждаемые волной в достаточно близких точках псевдоволновой поверхности, оказываются когерентными. Такая когерентность называется пространственной.

Итак, фаза колебания при переходе от одной точки псевдоволновой поверхности к другой изменяется беспорядочным образом. Введем расстояние $\rho_{\text{ког}}$, при смещении на которое вдоль псевдоволновой поверхности случайное изменение фазы достигает значения порядка π. Колебания в двух точках псевдоволновой поверхности, отстоящих друг от друга на расстояние, меньшее $\rho_{\text{ког}}$, будут приблизительно когерентными. Расстояние $\rho_{\text{ког}}$ называется длиной пространственной когерентности или радиусом когерентности. Из (4.25) следует, что

$$\rho_{\text{ког}} \sim \lambda/\varphi. \tag{4.26}$$

Угловой размер Солнца составляет около 0,01 рад, длина световых волн равна примерно 0,5 мкм. Следовательно, радиус когерентности приходящих от Солнца световых волн имеет значение порядка

$$\rho_{\text{ког}} = (0,5/0,01)\ \text{мкм} = 50\ \text{мкм} = 0,05\ \text{мм}. \tag{4.27}$$

Все пространство, занимаемое волной, можно разбить на части, в каждой из которых волна приблизительно сохраняет когерентность. Объем такой части пространства, называемый объемом когерентности, по порядку величины равен произведению длины временной когерентности на площадь круга радиуса $\rho_{\text{ког}}$.

Пространственная когерентность световой волны вблизи поверхности излучающего ее нагретого тела ограничивается размером $\rho_{\text{ког}}$ всего в несколько длин волн. По мере

[4]) Следует иметь в виду, что этот термин не используется в научной литературе. Мы пользуемся им условно, чтобы сделать изложение более наглядным.

удаления от источника степень пространственной когерентности возрастает. Излучение лазера [5]) обладает огромной временной и пространственной когерентностью. У выходного отверстия лазера пространственная когерентность наблюдается во всем поперечном сечении светового пучка.

Можно было бы, казалось, наблюдать интерференцию, пропустив свет, распространяющийся от произвольного источника, через две щели в непрозрачном экране. Однако при малой пространственной когерентности падающей на щели волны пучки света, прошедшие через щели, окажутся некогерентными, и интерференционная картина будет отсутствовать. Юнг получил в 1802 г. интерференцию от двух щелей, увеличив пространственную когерентность падающего на щели света. Такое увеличение Юнг осуществил, пропустив предварительно свет через небольшое отверстие в непрозрачном экране. Прошедшим через это отверстие светом освещались щели во втором непрозрачном экране. Таким способом Юнг впервые наблюдал интерференцию световых волн и определил длины этих волн.

4.3. Способы наблюдения интерференции света

Рассмотрим две конкретные интерференционные схемы, одна из которых использует для разделения световой волны на две части отражение, а другая — преломление света.

Зеркала Френеля. Два плоских соприкасающихся зеркала OM и ON располагаются так, что их отражающие поверхности образуют угол, близкий к π (рис. 4.8), соответственно угол φ очень мал. Параллельно линии пересечения зеркал O на расстоянии r от нее помещается прямолинейный источник света S (например, узкая светящаяся щель). Зеркала отбрасывают на экран $Э$ две цилиндрические когерентные волны, распространяющиеся так, как если бы они исходили из мнимых источников S_1 и S_2. Непрозрачный экран $Э_1$ преграждает свету пусть от источника S к экрану $Э$.

Луч OQ представляет собой отражение луча SO от зеркала OM, луч OP — отражение луча SO от зеркала ON. Легко сообразить, что угол между лучами OP и OQ равен 2φ. Поскольку S и S_1 расположены относительно OM

[5]) О лазерах будет идти речь в кн. 5.

симметрично, длина отрезка OS_1 равна OS, т. е. r. Аналогичные рассуждения приводят к тому же результату для отрезка OS_2. Таким образом, расстояние между источниками S_1 и S_2 равно

$$d = 2r\sin\varphi \approx 2r\varphi.$$

Из рис. 4.8 видно, что $a = r\cos\varphi \approx r$. Следовательно,

$$l = r + b,$$

где b — расстояние от линии пересечения зеркал O до экрана $Э$.

Подставив найденные нами значения d и l в формулу (4.10), получим ширину интерференционной полосы:

$$\Delta x = \frac{r+b}{2r\varphi}\lambda. \tag{4.28}$$

Область перекрытия волн PQ имеет протяженность $2b\,\mathrm{tg}\,\varphi \approx 2b\varphi$. Разделив эту длину на ширину полосы Δx,

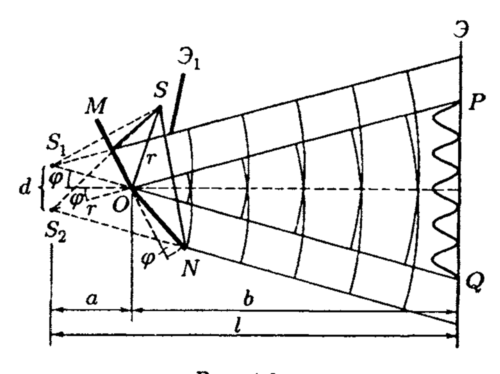


Рис. 4.8

найдем максимальное число интерференционных полос, которое можно наблюдать с помощью зеркал Френеля при данных параметрах схемы:

$$N = \frac{4br\varphi^2}{\lambda(r+b)}. \tag{4.29}$$

Для того чтобы все эти полосы были действительно видны, необходимо, чтобы $N/2$ не превзошло $m_{\text{пред}}$, определяемого формулой (4.22).

Бипризма Френеля. Изготовленные из одного куска стекла две призмы с малым преломляющим углом ϑ имеют одну общую грань (рис. 4.9). Параллельно этой грани на расстоянии a от нее располагается прямолинейный источник света S.

Можно показать, что в случае, когда преломляющий луч ϑ призмы очень мал и углы падения лучей на грань

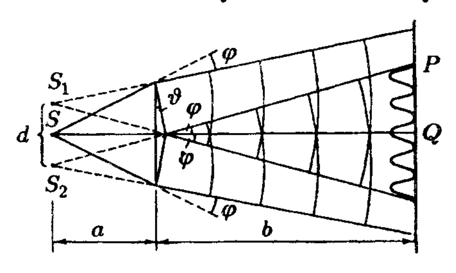


Рис. 4.9

призмы не очень велики, все лучи отклоняются призмой на практически одинаковой угол, равный

$$\varphi = (n-1)\vartheta$$

(n — показатель преломления призмы). Угол падения лучей на бипризму невелик. Поэтому все лучи отклоняются каждой из половин бипризмы на одинаковый угол. В результате образуются две когерентные цилиндрические волны, исходящие из мнимых источников S_1 и S_2, лежащих в одной плоскости с S. Расстояние между источниками равно

$$d = 2a\sin\varphi \approx 2a\varphi = 2a(n-1)\vartheta.$$

Расстояние от источников до экрана равно

$$l = a + b.$$

Ширину интерференционной полосы находим по формуле (4.10):

$$\Delta x = \frac{a+b}{2a(n-1)\vartheta}\lambda. \qquad (4.30)$$

Область перекрытия волн PQ имеет протяженность

$$2b\,\mathrm{tg}\,\varphi \approx 2b\varphi = 2b(n-1)\vartheta.$$

Максимальное число наблюдаемых полос составляет

$$N = \frac{4ab(n-1)^2\vartheta^2}{\lambda(a+b)}. \qquad (4.31)$$

4.4. Интерференция света при отражении от тонких пластинок

При падении световой волны на тонкую прозрачную пластинку (или пленку) происходит отражение от обеих поверхностей пластинки. В результате возникают две световые волны, которые при известных условиях могут интерферировать.

Пусть на прозрачную плоскопараллельную пластинку падает плоская световая волна, которую можно рассматривать как параллельный пучок лучей (рис. 4.10). Пластинка отбрасывает вверх два параллельных пучка света,

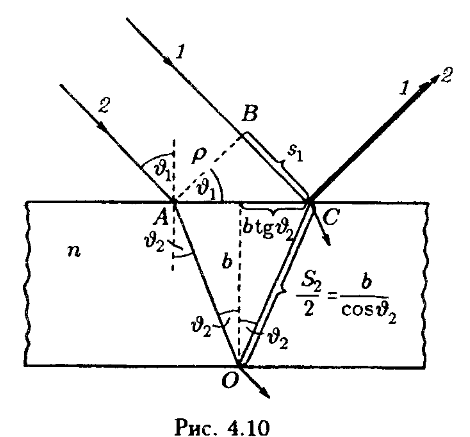


Рис. 4.10

из которых один образовался за счет отражения от верхней поверхности пластинки, второй — вследствие отражения от нижней поверхности (на рис. 4.10 каждый из этих пучков представлен только одним лучом). При входе в пластинку и при выходе из нее второй пучок претерпевает преломление. Кроме этих двух пучков, пластинка отбросит вверх пучки, возникающие в результате трехкратного, пятикратного и т. д. отражения от поверхностей пластинки. Однако ввиду их малой интенсивности мы эти пучки принимать во внимание не будем[6]). Не

[6]) При $n = 1{,}5$ от поверхности пластинки отражается примерно 5 % падающего светового потока (см. последний абзац § 3.3). После двух отражений интенсивность будет равна 0,05·0,05, или 0,25 % интенсивности первоначального пучка. После трех отражений — 0,05·0,05·0,05, или 0,0125 % интенсивности пучка.

будем также интересоваться пучками, прошедшими через пластинку.

Разность хода, приобретаемая лучами *1* и *2* до того, как они сойдутся в точке C, равна

$$\Delta = ns_2 - s_1, \tag{4.32}$$

где s_1 — длина отрезка BC, а s_2 — суммарная длина отрезков AO и OC, n — показатель преломления пластинки. Показатель преломления среды, окружающей пластинку, полагаем равным единице. Из рис. 4.10 видно, что $s_1 = 2b \operatorname{tg} \vartheta_2 \sin \vartheta_1$, $s_2 = 2b / \cos \vartheta_2$ (b — толщина пластинки). Подстановка этих значений в выражение (4.32) дает

$$\Delta = \frac{2bn}{\cos \vartheta_2} - 2b \operatorname{tg} \vartheta_2 \sin \vartheta_1 = 2b \frac{n^2 - n \sin \vartheta_2 \sin \vartheta_1}{n \cos \vartheta_2}.$$

Произведя замену $n \sin \vartheta_2 = \sin \vartheta_1$ и учтя, что

$$n \cos \vartheta_2 = \sqrt{n^2 - n^2 \sin^2 \vartheta_2} = \sqrt{n^2 - \sin^2 \vartheta_1},$$

легко привести формулу для Δ к виду

$$\Delta = 2b\sqrt{n^2 - \sin^2 \vartheta_1}. \tag{4.33}$$

При вычислении разности фаз δ между колебаниями в лучах *1* и *2* нужно, кроме оптической разности хода Δ, учесть возможность изменения фазы волны при отражении (см. § 3.3). В точке C (см. рис. 4.10) отражение происходит от границы раздела среды, оптически менее плотной, со средой, оптически более плотной. Поэтому фаза волны претерпевает изменение на π. В точке O отражение происходит от границы раздела среды, оптически более плотной, со средой, оптически менее плотной, так что скачка фазы не происходит. В итоге между лучами *1* и *2* возникает дополнительная разность фаз, равная π. Ее можно учесть, добавив к Δ (или вычтя из нее) половину длины волны в вакууме. В результате получим

$$\Delta = 2b\sqrt{n^2 - \sin^2 \vartheta_1} - \lambda_0/2. \tag{4.34}$$

Итак, при падении на пластинку плоской волны образуются две отраженные волны, разность хода которых определяется формулой (4.34). Выясним условия, при которых эти волны окажутся когерентными и смогут интерферировать. Рассмотрим два случая.

1. Плоскопараллельная пластинка. Обе плоские отраженные волны распространяются в одном направлении, образующем с нормалью к пластинке угол, равный углу падения ϑ_1. Эти волны смогут интерферировать, если будут соблюдены условия как временной, так и пространственной когерентности. второй

Для того чтобы имела место временная когерентность, разность хода (4.34) не должна превышать длину когерентности, равную $\lambda^2/\Delta\lambda \approx \lambda_0^2/\Delta\lambda_0$ (см. формулу (4.21)). Следовательно, должно соблюдаться условие

$$2b\sqrt{n^2 - \sin^2\vartheta_1} - \frac{\lambda_0}{2} < \frac{\lambda_0^2}{\Delta\lambda_0},$$

или

$$b < \frac{\lambda_0(\lambda_0/\Delta\lambda_0 + 1/2)}{2\sqrt{n^2 - \sin^2\vartheta_1}}.$$

В полученном соотношении одной второй можно пренебречь по сравнению с $\lambda_0/\Delta\lambda_0$. Выражение $\sqrt{n^2 - \sin^2\vartheta_1}$ имеет значение порядка единицы [7]. Поэтому можно написать

$$b < \frac{\lambda_0^2}{2\Delta\lambda_0} \tag{4.35}$$

(удвоенная толщина пластинки должна быть меньше длины когерентности).

Таким образом, отраженные волны будут когерентными только в том случае, если толщина пластинки b не превышает величины, определяемой соотношением (4.35). Положив $\lambda_0 = 500$ Å и $\Delta\lambda_0 = 20$ Å, получим предельное значение толщины, равное

$$\frac{5000^2}{2\cdot 20}\ \text{Å} \approx 6\cdot 10^5\ \text{Å} = 0{,}06\ \text{мм}. \tag{4.36}$$

Теперь рассмотрим условие соблюдения пространственной когерентности. Поставим на пути отраженных пучков экран *Э* (рис. 4.11). Приходящие в точку P' лучи *1'* и *2'* отстоят в падающем пучке на расстояние ρ'. Если это расстояние не превышает радиуса когерентности $\rho_{\text{ког}}$

---

[7]) Для $n = 1{,}5$ значение этого выражения изменяется в пределах от 1,12 (при $\vartheta_1 = \pi/2$) до 1,5 (при $\vartheta_1 = 0$).

падающей волны, лучи $1'$ и $2'$ будут когерентными и создадут в точке P' освещенность, определяемую значением разности хода Δ, отвечающим углу падения ϑ_1'. Другие пары лучей, идущие под тем же углом ϑ_1', создадут в остальных точках экрана такую же освещенность. Таким образом, экран окажется равномерно освещенным (в частном случае, когда $\Delta = (m + 1/2)\lambda_0$, экран будет темным). При изменении наклона пучка (т. е. при изменении угла ϑ_1) освещенность экрана будет меняться.

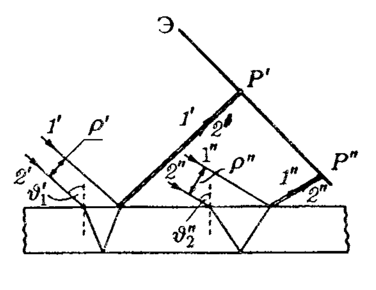


Рис. 4.11

Из рис. 4.10 видно, что расстояние между падающими лучами 1 и 2 равно

$$\rho = 2b\,\mathrm{tg}\,\vartheta_2 \cos\vartheta_1 = \frac{b \sin 2\vartheta_1}{\sqrt{n^2 - \sin^2\vartheta_1}}. \tag{4.37}$$

Если принять $n = 1,5$, то для $\vartheta_1 = 45°$ получается $\rho = 0,8b$, а для $\vartheta_1 = 10°$ $\rho = 0,1b$. Для нормального падения ($\vartheta_1 = 0$) $\rho = 0$ при любом n.

Радиус когерентности солнечного света имеет значение порядка 0,05 мм (см. (4.27)). При угле падения 45° можно положить $\rho \approx b$. Следовательно, для возникновения интерференции в этих условиях должно выполняться соотношение

$$b < 0,05 \text{ мм} \tag{4.38}$$

(ср. с (4.36)). Для угла падения порядка 10° пространственная когерентность будет сохраняться при толщине пластинки, не превышающей 0,5 мм. Таким образом, мы приходим к выводу, что вследствие ограничений, накладываемых временной и пространственной когерентностями, интерференция при освещении пластинки солнечным светом наблюдается только в том случае, если толщина пластинки не превышает нескольких сотых миллиметра. При освещении светом с большей степенью когерентности интерференция наблюдается и при отражении от более толстых пластинок или пленок.

Практически интерференцию от плоскопараллельной пластинки наблюдают, поставив на пути отраженных пучков линзу, которая собирает лучи в одной из точек экрана,

расположенного в фокальной плоскости линзы (рис. 4.12). Освещенность в этой точке зависит от значения величины (4.34). При $\Delta = m\lambda_0$ получаются максимумы, при $\Delta = (m + 1/2)\lambda_0$ — минимумы интенсивности (m — целое число). Условие максимума интенсивности имеет вид

$$2b\sqrt{n^2 - \sin^2 \vartheta_1} = (m + 1/2)\lambda_0. \qquad (4.39)$$

Пусть тонкая плоскопараллельная пластинка освещается рассеянным монохроматическим светом (см. рис. 4.12). Расположим параллельно пластинке линзу, в фокальной плоскости которой поместим экран. В рассе-

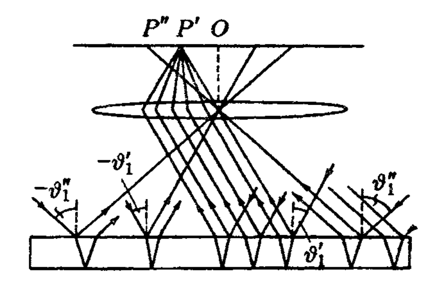


Рис. 4.12

янном свете имеются лучи самых разнообразных направлений. Лучи, параллельные плоскости рисунка и падающие на пластинку под углом ϑ'_1, после отражения от обеих поверхностей пластинки соберутся линзой в точке P' и создадут в этой точке освещенность, определяемую значением оптической разности хода. Лучи, идущие в других плоскостях, но падающие на пластинку под тем же углом ϑ'_1, соберутся линзой в других точках, отстоящих от центра экрана O на такое же расстояние, как и точка P'. Освещенность во всех этих точках будет одинакова. Таким образом, лучи, падающие на пластинку под одинаковым углом ϑ'_1, создадут на экране совокупность одинаково освещенных точек, расположенных по окружности с центром в O. Аналогично лучи, падающие под другим углом ϑ''_1, создадут на экране совокупность одинаково (но иначе, поскольку Δ иная) освещенных точек, расположенных по окружности другого радиуса. В результате на экране возникнет система чередующихся светлых и темных круго-

вых полос с центром в точке O. Каждая полоса образована лучами, падающими на пластинку под одинаковым углом ϑ_1. Поэтому получающиеся в описанных условиях интерференционные полосы носят название полос равного наклона. При ином расположении линзы относительно пластинки (экран во всех случаях должен совпадать с фокальной плоскостью линзы) форма полос равного наклона будет другой.

Каждая точка интерференционной картины обусловлена лучами, образующими до прохождения через линзу параллельный пучок. Поэтому при наблюдении полос равного наклона экран должен располагаться в фокальной плоскости линзы, т. е. так, как его располагают для получения на нем изображения бесконечно удаленных предметов. В соответствии с этим говорят, что полосы разного наклона локализованы в бесконечности. Роль линзы может играть хрусталик, а экрана — сетчатка глаза. В этом случае для наблюдения полос равного наклона глаз должен быть аккомодирован так, как при рассматривании очень удаленных предметов.

Согласно формуле (4.39) положение максимумов зависит от длины волны λ_0. Поэтому в белом свете получается совокупность смещенных относительно друг друга полос, образованных лучами разных цветов, и интерференционная картина приобретает радужную окраску. Возможность наблюдения интерференционной картины в белом свете определяется способностью глаза различать оттенки света близких длин волн. Лучи, различающиеся по длине волны менее чем на 20 Å, средний глаз воспринимает как имеющие одинаковый цвет. Поэтому для оценки условий, при которых может наблюдаться интерференция от пластинок в белом свете, $\Delta\lambda_0$ следует положить равным 20 Å. Именно такое значение было нами взято при оценке толщины пластинки (см. (4.36)).

2. Пластинка переменной толщины. Возьмем пластинку в виде клина с углом при вершине φ (рис. 4.13). Пусть на нее падает параллельный пучок лучей. Отразившиеся от разных поверхностей пластинки лучи теперь не будут параллельными. Два луча, практически сливающихся до падения на пластинку (на рис. 4.13 они изображены в виде одной прямой линии, обозначенной $1'$), пересекаются после отражения в точке Q'. Два практически

сливающихся луча $1''$ пересекаются в точке Q''. Можно показать, что точки Q', Q'' и другие аналогичные им точки лежат в одной плоскости, проходящей через вершину клина O. Отразившийся от нижней поверхности клина луч $1'$ и отразившийся от верхней поверхности луч $2'$ пересекутся в точке R', расположенной ближе к клину, чем Q'. Аналогичные лучи $1'$ и $3'$ пересекутся в точке P', отстоящей от поверхности клина дальше, чем Q'.

Направления распространения волн, отраженных от верхней и нижней поверхности клина, не совпадают. Временная когерентность будет соблюдаться только для частей волн, отразившихся от мест клина, для которых толщина удовлетворяет условию (4.35). Допустим, что это условие выполняется для всего клина. Кроме того, предположим, что радиус когерентности намного превышает

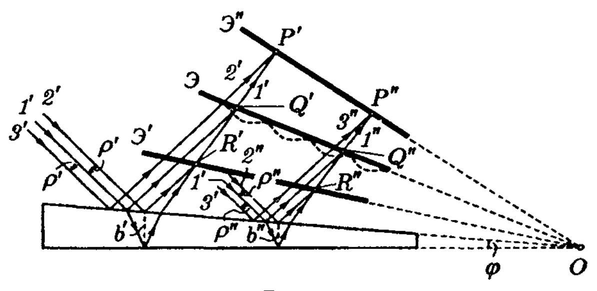


Рис. 4.13

длину клина. Тогда отраженные волны будут когерентными во всем пространстве над клином, и при любом расстоянии экрана от клина на нем будет наблюдаться интерференционная картина в виде полос, параллельных вершине клина O (см. три последних абзаца § 4.1). Так, в частности, обстоит дело при освещении клина светом, испускаемым лазером.

При ограниченной пространственной когерентности область локализации интерференционной картины (т. е. область пространства, располагая в которой экран, можно наблюдать на нем интерференционную картину) также оказывается ограниченной. Если расположить экран так, чтобы он проходил через точки $Q', Q'', \ldots$ (см. экран Э на рис. 4.13), на экране возникнет интерференционная картина даже в том случае, если пространственная когерентность падающей волны крайне мала (в точках экрана пе-

ресекаются лучи, которые до падения на клин совпадали). При малом угле клина φ разность хода лучей можно с достаточной степенью точности вычислять по формуле (4.34), беря в качестве b толщину пластинки в месте падения на нее лучей. Поскольку разность хода для лучей, отразившихся от различных участков клина, теперь неодинакова, освещенность экрана будет неравномерной — на экране появятся светлые и темные полосы (см. на рис. 4.13 штриховую кривую, показывающую освещенность экрана $Э$). Каждая из таких полос возникает в результате отражения от участков клина с одинаковой толщиной, вследствие чего их называют **полосами равной толщины**.

При смещении экрана из положения $Э$ в направлении от клина или к клину начинает сказываться степень пространственной когерентности падающей волны. Если в положении экрана, обозначенном на рис. 4.13 через $Э'$, расстояние ρ' между падающими лучами $1'$ и $2'$ станет порядка радиуса когерентности, интерференционная картина на экране $Э'$ наблюдаться не будет. Аналогично картина исчезает в положении экрана, обозначенном через $Э''$.

Таким образом, интерференционная картина, получающаяся при отражении от клина плоской волны, оказывается локализованной в некоторой области вблизи поверхности клина, причем эта область тем уже, чем меньше степень пространственной когерентности падающей волны. Из рис. 4.13 видно, что по мере приближения к вершине клина становятся более благоприятными условия как временной, так и пространственной когерентности. Поэтому отчетливость интерференционной картины уменьшается при перемещении от вершины клина к его основанию. Может случиться, что картина наблюдается только для более тонкой части клина. Для остальной части на экране возникает равномерная освещенность.

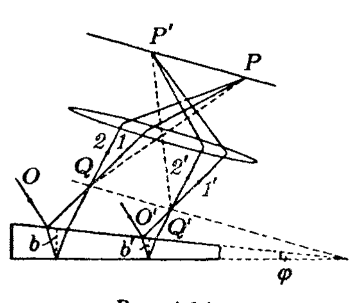


Рис. 4.14

Практически полосы равной толщины наблюдают, поместив вблизи клина линзу и за ней экран (рис. 4.14). Роль линзы может играть хрусталик, а роль экрана —

сетчатка глаза. Если экран за линзой расположен в плоскости, сопряженной с плоскостью, обозначенной на рис. 4.13 через Э (соответственно глаз аккомодирован на эту плоскость), картина будет наиболее четкой. При перемещении экрана, на который проецируется изображение (либо при перемещении линзы), картина будет ухудшаться и исчезнет совсем, когда плоскость, сопряженная с экраном, выйдет за пределы области локализации интерференционной картины, наблюдаемой без линзы.

При наблюдении в белом свете полосы будут окрашенными, так что поверхность пластинки или пленки представляется имеющей радужную окраску. Такую окраску имеют, например, расплывшиеся на поверхности воды тонкие пленки нефти или масла, а также мыльные пленки. Цвета побежалости, возникающие на поверхности стальных изделий при их закалке, тоже обусловлены интерференцией от пленки прозрачных окислов.

Сопоставим два рассмотренных нами случая интерференции при отражении от тонких пленок. Полосы равного наклона получаются при освещении пластинки постоянной толщины ($b = \text{const}$) рассеянным светом, в котором содержатся лучи различных направлений (ϑ_1 варьирует в более или менее широких пределах). Локализованы полосы равного наклона в бесконечности. Полосы равной толщины наблюдаются при освещении пластинки непостоянной толщины (b изменяется) параллельным пучком света ($\vartheta_1 = \text{const}$). Локализованы полосы равной толщины вблизи пластинки. В реальных условиях, например при наблюдении радужных цветов на мыльной или масляной пленке, изменяется как угол падения лучей, так и толщина пленки. В этом случае наблюдаются полосы смешанного типа.

Заметим, что интерференция от тонких пленок может наблюдаться не только в отраженном, но и в проходящем свете.

Кольца Ньютона. Классическим примером полос равной толщины являются кольца Ньютона. Они наблюдаются при отражении света от соприкасающихся друг с другом плоскопараллельной толстой стеклянной пластинки и плоско-выпуклой линзы с большим радиусом кривизны (рис. 4.15). Роль тонкой пленки, от поверхности которой отражаются когерентные волны, играет воздушный зазор между пластинкой и линзой (вследствие большой

толщины пластинки и линзы за счет отражений от других поверхностей интерференционные полосы не возникают). При нормальном падении света полосы равной толщины имеют вид концентрических окружностей, при наклонном падении — эллипсов. Найдем радиусы колец Ньютона, получающихся при падении света по нормали к пластинке. В этом случае $\sin\vartheta_1 = 0$ и оптическая разность хода равна удвоенной толщине зазора (см. формулу (4.33); предполагается, что в зазоре $n = 1$). Из рис. 4.15 следует, что

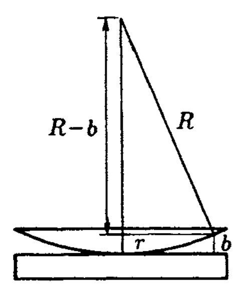


Рис. 4.15

$$R^2 = (R-b)^2 + r^2 \approx R^2 - 2Rb + r^2. \tag{4.40}$$

где R — радиус кривизны линзы, r — радиус окружности, всем точкам которой соответствует одинаковый зазор b. Ввиду малости b мы пренебрегли величиной b^2 по сравнению с $2Rb$. В соответствии с (4.40) $b = r^2/2R$. Чтобы учесть возникающее при отражении от пластинки изменение фазы на π, нужно к $2b = r^2/R$ прибавить $\lambda_0/2$. В результате получится

$$\Delta = \frac{r^2}{R} + \frac{\lambda_0}{2}. \tag{4.41}$$

В точках, для которых $\Delta = m'\lambda_0 = 2m'(\lambda_0/2)$, возникнут максимумы, в точках, для которых $\Delta = (m' + 1/2)\lambda_0 = (2m' + 1)(\lambda_0/2)$, — минимумы интенсивности. Оба условия можно объединить в одно:

$$\Delta = m\frac{\lambda_0}{2},$$

причем четным значениям m будут соответствовать максимумы, а нечетным — минимумы интенсивности. Подставив сюда выражение (4.41) для Δ и разрешив получившееся уравнение относительно r, найдем радиусы светлых и темных колец Ньютона:

$$r = \sqrt{R\lambda_0(m-1)/2} \quad (m = 1, 2, 3, \ldots). \tag{4.42}$$

Четным m соответствуют радиусы светлых колец, нечетным m — радиусы темных колец. Значению $m = 1$

соответствует $r = 0$, т. е. точка в месте касания пластинки и линзы. В этой точке наблюдается минимум интенсивности, обусловленный изменением фазы на π при отражении световой волны от пластинки.

Просветление оптики. Интерференция при отражении от тонких пленок лежит в основе просветления оптики. Прохождение света через каждую преломляющую поверхность линзы сопровождается отражением примерно 4 % падающего света. В сложных объективах такие отражения совершаются многократно и суммарная потеря светового потока достигает заметной величины. Кроме того, отражения от поверхностей линз приводят к возникновению бликов. В просветленной оптике для устранения отражения света на каждую свободную поверхность линзы наносится тонкая пленка вещества с показателем преломления иным, чем у линзы. Толщина пленки подбирается так, чтобы волны, отраженные от обеих ее поверхностей, погашали друг друга. Особенно хороший результат достигается в том случае, если показатель преломления пленки равен корню квадратному из показателей преломления линзы. При этом условии интенсивность обеих отраженных от поверхностей пленки волн одинакова.

4.5. Интерферометр Майкельсона[8])

Имеется много разновидностей интерференционных приборов, называемых интерферометрами. На рис. 4.16*а* изображена схема интерферометра Майкельсона. Пучок света от источника S падает на полупрозрачную пластинку P_1, покрытую тонким слоем серебра (этот слой показан на рисунке точками). Половина упавшего светового потока отражается пластинкой P_1 в направлении луча *1*, половина проходит сквозь пластинку и распространяется в направлении луча *2*. Пучок *1* отражается от зеркала M_1 и возвращается к P_1, где он делится на два равных по интенсивности пучка. Один из них проходит сквозь пластинку и образуют пучок *1'*, второй отражается в направлении к S; этот пучок нас интересовать больше не будет. Пучок *2*, отразившись от зеркала M_2, тоже возвращается к пластинке P_1, где он делится на две части: отразившийся от полупрозрачного слоя пучок *2'* и

[8]) Альберт Абрахам Майкельсон (1852-1931) — американский физик.

прошедший сквозь слой пучок, которым мы также интересоваться больше не будем. Пучки света *1'* и *2'* имеют одинаковую интенсивность.

При соблюдении условий временной и пространственной когерентности пучки *1'* и *2'* будут интерферировать. Результат интерференции зависит от оптической разности хода от пластинки P_1 до зеркал M_1 и M_2 и обратно. Луч *2* проходит толщу пластинки трижды, луч *1* — только один раз. Чтобы скомпенсировать возникающую за счет этого разную (вследствие дисперсии) для различных длин волн оптическую разность хода, на пути луча *1* ставится точно такая, как P_1, но не посеребренная пластинка P_2. Тем самым уравниваются пути лучей *1* и *2* в стекле. Интерференционная картина наблюдается с помощью зрительной трубы T.

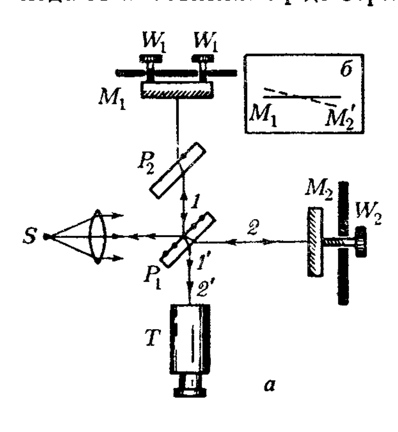


Рис. 4.16

Заменим мысленно зеркало M_2 его мнимым изображением M_2' в полупрозрачной пластинке P_1. Тогда лучи *1'* и *2'* можно рассматривать как возникшие за счет отражения от прозрачной пластинки, ограниченной плоскостями M_1 и M_2'. С помощью юстировочных винтов W_1 можно изменять угол между этими плоскостями, в частности их можно устанавливать строго параллельно друг другу.

Вращая микрометрический винт W_2, можно плавно перемещать зеркало M_2, не изменяя его наклона. Тем самым можно изменять толщину «пластинки», в частности можно заставить плоскости M_1 и M_2' пересечься друг с другом (рис. 4.16*б*).

Характер интерференционной картины зависит от юстировки зеркал и от расходимости пучка света, падающего на прибор. Если пучок параллелен, а плоскости M_1 и M_2' образуют угол, не равный нулю, то в поле зрения трубы наблюдаются прямолинейные полосы равной толщины, расположенные параллельно линии пересечения

плоскостей M_1 и M_2'. В белом свете все полосы, кроме совпадающей с линией пересечения полосы нулевого порядка, будут окрашенными. Нулевая полоса оказывается черной, так как луч *1* отражается от пластинки P_1 снаружи, а луч *2* — изнутри, вследствие чего между ними возникает разность фаз, равная π. В белом свете полосы наблюдаются лишь при малой толщине «пластинки» M_1M_2' (см. (4.36)). В монохроматическом свете, соответствующем красной линии кадмия, Майкельсон наблюдал отчетливую интерференционную картину при разности хода порядка 500 000 длин волн (расстояние между M_1 и M_2' составляет в этом случае приблизительно 150 мм).

При слегка расходящемся пучке света и строго параллельном расположении плоскостей M_1 и M_2' получаются полосы равного наклона, имеющие вид концентрических колец. При вращении микрометрического винта W_2 кольца увеличиваются или уменьшаются в диаметре. При этом в центре картины либо возникают новые кольца, либо уменьшающиеся кольца стягиваются в точку и затем исчезают. Смещение картины на одну полосу соответствует перемещению зеркала M_2 на половину длины волны.

С помощью описанного выше прибора Майкельсон осуществил несколько вошедших в историю физики экспериментов. Самый знаменитый из них, выполненный совместно с Морли в 1887 г., преследовал цель обнаружить движение Земли относительно гипотетического эфира (об этом опыте мы расскажем в §8.3). В 1890–1895 гг. с помощью изобретенного им интерферометра Майкельсон произвел первое сравнение длины волны красной линии кадмия с длиной стандартного метра.

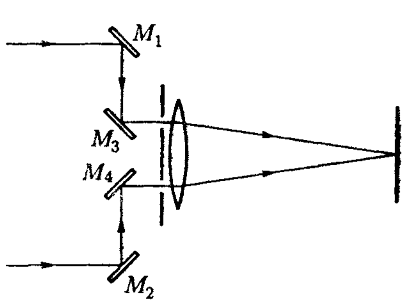


Рис. 4.17

В 1920 г. Майкельсон построил **звездный интерферометр**, с помощью которого он измерил угловые размеры некоторых звезд. Этот прибор монтировался на телескопе. Перед объективом телескопа устанавливался экран с двумя щелями (рис. 4.17). Свет от звезды отражался от симметричной системы зеркал M_1, M_2, M_3 и M_4,

установленных на жесткой раме, укрепленной на тележке. Внутренние зеркала M_3 и M_4 были неподвижны, а внешние M_1 и M_2 могли симметрично смещаться, удаляясь от зеркал M_3 и M_4 либо приближаясь к ним. Ход лучей ясен из рисунка. В фокальной плоскости объектива телескопа возникали интерференционные полосы, видность[9]) которых зависела от расстояния между внешними зеркалами. Перемещая эти зеркала, Майкельсон определял расстояние между ними l, при котором видность полос обращалась в нуль. Это расстояние должно быть порядка радиуса когерентности световой волны, пришедшей от звезды. Согласно (4.26) радиус когерентности равен λ/φ. Из условия $l = \lambda/\varphi$ получается угловой диаметр звезды

$$\varphi = \frac{\lambda}{l}.$$

Точный расчет приводит к формуле

$$\varphi = A\frac{\lambda}{l},$$

где $A = 1,22$ для источника в виде равномерно освещенного круглого диска. Если у краев диск темнее, чем в центре, коэффициент превышает 1,22, причем его значение зависит от скорости убывания освещенности в направлении от центра к краю. Кроме того, точный расчет дает, что, обратившись в нуль при некотором значении l, видность при дальнейшем увеличении l снова становится отличной от нуля; однако достигаемые ею при этом значения невелики.

Максимальное расстояние между внешними зеркалами в построенном Майкельсоном звездном интерферометре составляло 6,1 м (диаметр телескопа был равен 2,5 м). Этому расстоянию соответствовал наименьший измеримый угловой диаметр около 0,02″. Первой звездой, у которой был измерен угловой диаметр, была звезда Бетельгейзе (α Ориона). Полученное значение φ равнялось 0,047″.

---

[9]) Видностью полосы называется величина

$$V = \frac{I_{max} - I_{min}}{I_{max} + I_{min}},$$

где I_{max} и I_{min} — соответственно максимальная и минимальная интенсивности света в районе данной полосы.

4.6. Многолучевая интерференция

До сих пор мы рассматривали двухлучевую интерференцию. Теперь исследуем случай, когда интерферирует много световых лучей.

Допустим, что в данную точку экрана приходит N лучей одинаковой интенсивности, причем фаза каждого следующего луча сдвинута относительно фазы предыдущего на одну и ту же величину δ. Представим возбуждаемые лучами колебания в виде экспонент:

$$E_1 = a\exp(i\omega t), \quad E_2 = a\exp[i(\omega t + \delta)], \ldots,$$
$$E_m = a\exp\{i[\omega t + (m-1)\delta)]\}, \ldots,$$
$$E_N = a\exp\{i[\omega t + (N-1)\delta)]\}.$$

Результирующее колебание определится формулой

$$E = \sum_{m=1}^{N} E_m = a\exp(i\omega t)\sum_{m=1}^{N}\exp[i(m-1)\delta].$$

Полученное выражение представляет собой сумму N членов геометрической прогрессии с первым членом, равным единице, и знаменателем, равным $\exp(i\delta)$. Следовательно,

$$E = a\exp(i\omega t)\frac{1-\exp(iN\delta)}{1-\exp(i\delta)} = \hat{A}\exp(i\omega t).$$

где

$$\hat{A} = a\frac{1-\exp(iN\delta)}{1-\exp(i\delta)} \tag{4.43}$$

есть комплексная амплитуда, которую можно представить в виде

$$\hat{A} = A\exp(i\alpha) \tag{4.44}$$

(A — обычная амплитуда результирующего колебания, α — его начальная фаза).

Произведение величины (4.44) на ее комплексно сопряженную дает квадрат амплитуды результирующего колебания:

$$\hat{A}\hat{A}^* = A\exp(i\alpha)A\exp(-i\alpha) = A^2. \tag{4.45}$$

Подставив в (4.45) значение (4.43) для $\hat{A}$, получим следу-

ющее выражение для квадрата амплитуды:

$$A^2 = \hat{A}\hat{A}^* = a^2\frac{[1-\exp(iN\delta)][1-\exp(-iN\delta)]}{[1-\exp(i\delta)][1-\exp(-i\delta)]} =$$

$$= a^2\frac{2-\exp(iN\delta)-\exp(-iN\delta)}{2-\exp(i\delta)-\exp(-i\delta)} =$$

$$= a^2\frac{1-\cos(N\delta)}{1-\cos\delta} = a^2\frac{\sin^2(N\delta/2)}{\sin^2(\delta/2)}. \qquad (4.46)$$

Интенсивность пропорциональна квадрату амплитуды. Следовательно, интенсивность, возникающая при интерференции N лучей, определяется выражением

$$I(\delta) = Ka^2\frac{\sin^2(N\delta/2)}{\sin^2(\delta/2)} = I_0\frac{\sin^2(N\delta/2)}{\sin^2(\delta/2)} \qquad (4.47)$$

(K — коэффициент пропорциональности, $I_0 = Ka^2$ — интенсивность, создаваемая каждым из лучей в отдельности). При значениях

$$\delta = 2\pi m \quad (m = 0, \pm1, \pm2, \ldots) \qquad (4.48)$$

выражение (4.47) становится неопределенным.

Раскроем неопределенность по правилу Лопиталя:

$$\lim_{\delta\to2\pi m}\frac{\sin^2(N\delta/2)}{\sin^2(\delta/2)} =$$

$$= \lim_{\delta\to2\pi m}\frac{2\sin(N\delta/2)\cos(N\delta/2)\cdot N/2}{2\sin(\delta/2)\cos(\delta/2)\cdot 1/2} = \lim_{\delta\to2\pi m} N\frac{\sin(N\delta)}{\sin\delta}.$$

Полученное выражение также оказывается неопределенным. Поэтому применим правило Лопиталя еще раз:

$$\lim_{\delta\to2\pi m}\frac{\sin^2(N\delta/2)}{\sin^2(\delta/2)} = \lim_{\delta\to2\pi m} N\frac{\sin(N\delta)}{\sin\delta} =$$

$$= \lim_{\delta\to2\pi m} N\frac{N\cos(N\delta)}{\cos\delta} = N^2.$$

Таким образом, при $\delta = 2\pi m$ (или разностях хода $\Delta = m\lambda_0$) результирующая интенсивность равна

$$I = I_0N^2. \qquad (4.49)$$

Такой результат можно было предвидеть заранее. Действительно, в точки, для которых $\delta = 2\pi m$, все колебания приходят в одинаковой фазе. Следовательно, результирующая амплитуда оказывается в N раз больше амплитуды отдельного колебания, а интенсивность в N^2 раз больше интенсивности отдельного колебания.

Назовем места, в которых наблюдается интенсивность, определяемая формулой (4.49), главными максимумами. Их положение определяется условием (4.48). Число m называется порядком главного максимума. Из выражения (4.47) следует, что в промежутке между двумя соседними главными максимумами располагается $N-1$ минимумов интенсивности. Чтобы убедиться в этом, рассмотрим, например, промежуток между максимумами нулевого ($m = 0$) и первого ($m = 1$) порядка. В этом промежутке δ изменяется от нуля до 2π, а $\delta/2$ — от нуля до π. Знаменатель выражения (4.47) всюду, кроме концов промежутка, отличен от нуля, причем в середине промежутка он достигает наибольшего значения, равного единице. Величина $N\delta/2$ принимает в рассматриваемом промежутке все значения от нуля до $N\pi$. При значениях $\pi, 2\pi, \ldots, (N-1)\pi$ числитель выражения (4.47) становится равным нулю. Это и будут минимумы интенсивности. Их положения отвечают значениям δ, равным

$$\delta = \frac{k'}{N} \cdot 2\pi \quad (k = 1, 2, \ldots, N-1). \tag{4.50}$$

В промежутках между $N-1$ минимумами располагаются $N-2$ вторичных максимумов. Наибольшей интенсивностью обладают вторичные максимумы, ближайшие к главным максимумам. Вторичный максимум, ближайший к главному максимуму нулевого порядка, лежит между первым ($k' = 1$) и вторым ($k' = 2$) минимумами. Этим минимумам отвечают значения δ, равные $2\pi/N$ и $4\pi/N$. Следовательно, рассматриваемому вторичному максимуму соответствует $\delta = 3\pi/N$. Подстановка этого значения в формулу (4.47) дает

$$I\left(\frac{3\pi}{N}\right) = Ka^2 \frac{\sin^2(3\pi/2)}{\sin^2(3\pi/2N)}.$$

Числитель равен единице. При большом N можно положить синус в знаменателе равным его аргументу

$(\sin(3\pi/2N) \approx 3\pi/2N)$. Тогда

$$I\left(\frac{3\pi}{N}\right) = Ka^2 \frac{1}{(3\pi/2N)^2} = \frac{Ka^2N^2}{(3\pi/2)^2}.$$

В числителе получилась интенсивность главного максимума (см. (4.49)). Таким образом, при большом N ближайший к главному максимуму вторичный максимум имеет интенсивность в $(3\pi/2)^2 \approx 22$ раза меньшую, чем интенсивность главного максимума. Остальные вторичные максимумы оказываются еще слабее.

На рис. 4.18 изображен график функции $I(\delta)$ для $N = 10$. Для сравнения штриховой линией показан график

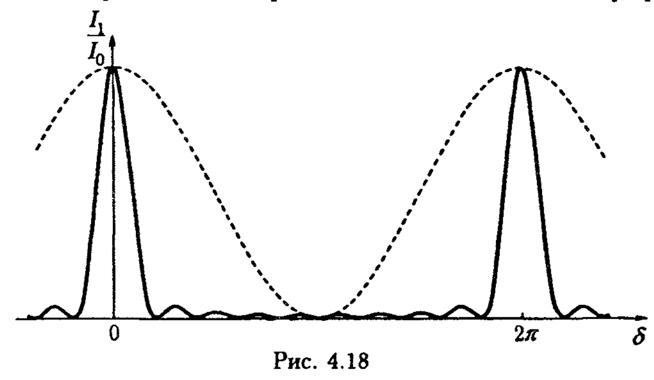


Рис. 4.18

интенсивности для $N = 2$ (двухлучевая интерференция; см. кривую $I(x)$ на рис. 4.2). Из рисунка видно, что с увеличением числа интерферирующих лучей главные максимумы делаются все более узкими. Вторичные максимумы настолько слабы, что практически интерференционная картина имеет вид узких ярких линий на темном фоне.

Теперь рассмотрим интерференцию очень большого числа лучей, интенсивность которых убывает в геометрической прогрессии. Складываемые колебания имеют вид

$$\begin{gathered} E_1 = a\exp(i\omega t), \quad E_2 = a\rho\exp[i(\omega t + \delta)], \quad \ldots, \\ E_m = a\rho^{m-1}\exp\{i[\omega t + (m-1)\delta]\}, \quad \ldots \end{gathered} \tag{4.51}$$

(ρ — постоянная величина, меньшая единицы). Результирующее колебание описывается формулой

$$E = \sum_{m=1}^{N} E_m = a\exp(i\omega t)\sum_{m=1}^{N} \rho^{m-1}\exp[i(m-1)\delta].$$

Воспользовавшись выражением для суммы членов геометрической прогрессии, получим

$$E = a\exp(i\omega t)\frac{1-\rho^N\exp(iN\delta)}{1-\rho\exp(i\delta)} = \hat{A}\exp(i\omega t).$$

Таким образом, комплексная амплитуда равна

$$\hat{A} = a\frac{1-\rho^N\exp(iN\delta)}{1-\rho\exp(i\delta)}. \tag{4.52}$$

Если N очень велико, комплексным числом $\rho^N\exp(iN\delta)$ можно пренебречь по сравнению с единицей (для примера укажем, что $0,9^{100} \approx 3\cdot 10^{-5}$). Тогда выражение (4.52) упрощается следующим образом:

$$\hat{A} = a\frac{1}{1-\rho\exp(i\delta)}.$$

Умножив это выражение на комплексно с ним сопряженное, получим квадрат обычной амплитуды результирующего колебания:

$$A^2 = \hat{A}\hat{A}^* = \frac{a^2}{[1-\rho\exp(i\delta)][1-\rho\exp(-i\delta)]} =$$

$$= \frac{a^2}{1+\rho^2-\rho[\exp(i\delta)+\exp(-i\delta)]} = \frac{a^2}{1+\rho^2-2\rho\cos\delta} =$$

$$= \frac{a^2}{(1-\rho)^2+2\rho(1-\cos\delta)} = \frac{a^2}{(1-\rho)^2+4\rho\sin^2(\delta/2)}.$$

Отсюда

$$I(\delta) = \frac{Ka^2}{(1-\rho)^2+4\rho\sin^2(\delta/2)} = \frac{I_1}{(1-\rho)^2+4\rho\sin^2(\delta/2)}, \tag{4.53}$$

где $I_1 = Ka^2$ — интенсивность первого (наиболее интенсивного) луча.

При значениях

$$\delta = 2\pi m \quad (m = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots) \tag{4.54}$$

выражение (4.53) имеет максимумы, равные

$$I_{max} = \frac{I_1}{(1-\rho)^2}. \tag{4.55}$$

В промежутках между максимумами функция изменяется монотонно, достигая в середине промежутка значения, равного

$$I_{\min} = \frac{I_1}{(1-\rho)^2 + 4\rho} = \frac{I_1}{(1+\rho)^2}. \qquad (4.56)$$

Таким образом, отношение интенсивности в максимуме к интенсивности в минимуме

$$\frac{I_{\max}}{I_{\min}} = \left(\frac{1+\rho}{1-\rho}\right)^2 \qquad (4.57)$$

оказывается тем больше, чем ближе ρ к единице, т. е. чем медленнее происходит убывание интенсивности интерферирующих лучей.

На рис. 4.19 показан график функции (4.53) для $\rho = 0,8$. Из рисунка следует, что интерференционная картина имеет вид узких резких линий на практически темном фоне. В отличие от рис. 4.18 вторичные максимумы отсутствуют.

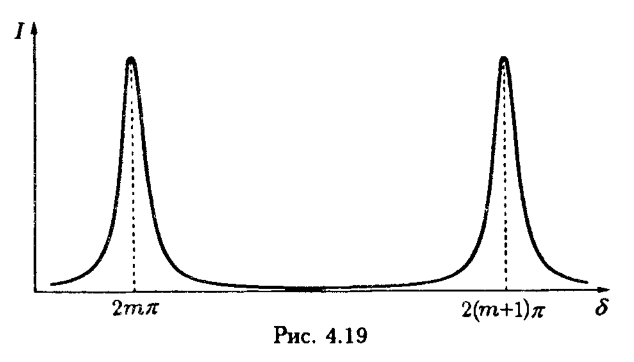


Рис. 4.19

Практически случай большого числа лучей с убывающей интенсивностью осуществляется в **интерферометре Фабри–Перо**[10]. Этот прибор состоит из двух стеклянных или кварцевых пластинок, разделенных воздушным промежутком (рис. 4.20). Тщательной обработкой добиваются того, чтобы неровности внутренних поверхностей пластинок не превышали нескольких сотых долей длины световой волны. Затем на эти поверхности

[10]) Шарль Фабри (1867–1945) — французский физик; Альфред Перо (1863–1925) — французский физик.

наносятся частично прозрачные металлические слои или диэлектрические пленки[11]. Внешние поверхности пластинок делают слегка скошенными относительно внутренних, чтобы устранить блики, обусловленные отражением света от этих поверхностей. В первоначальной конструкции интерферометра одна из пластинок могла перемещаться относительно другой неподвижной пластинки с помощью микрометрического винта. Однако ненадежность такой конструкции привела к тому, что она вышла из употребления. В современных конструкциях пластинки закреплены неподвижно. Параллельность внутренних рабочих плоскостей достигается тем, что между пластинками устанавливается кольцо из инвара или кварца[12]. Это кольцо имеет с каждой стороны по три выступа с тщательно отшлифованными торцами. Пластинки прижимаются к кольцу пружинами. Такое устройство надежно обеспечивает строгую параллельность внутренних плоскостей пластинок и постоянство расстояния между ними. Подобный интерферометр с фиксированным расстоянием между пластинками называется эталоном Фабри–Перо.

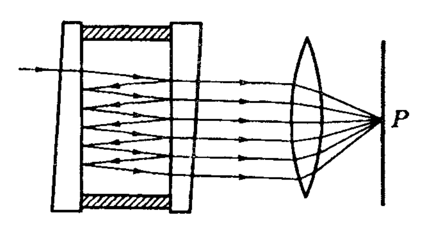


Рис. 4.20

Рассмотрим, что происходит с лучом, вошедшим в зазор между пластинками (рис. 4.21). Пусть интенсивность вошедшего луча равна I_0. В точке A_1 этот луч разделяется на вышедший наружу луч *1* и отраженный луч *1'*. Если коэффициент отражения от поверхности пластинки равен ρ, то интенсивность луча *1* будет равна[13] $I_1 = (1-\rho)I_0$, а интенсивность отраженного луча *1'* равна $I'_1 = \rho I_0$. В точке B_1 луч *1'* разделяется на два. Показанный штриховой линией луч *1'''* выйдет из игры, а отраженный луч *1''*

[11]) Металлические слои обладают тем недостатком, что сильно поглощают световые лучи. Поэтому в последние годы их стали заменять многослойными диэлектрическими покрытиями, обладающими большой отражательной способностью.

[12]) Оба эти материала отличает крайне малый температурный коэффициент расширения.

[13]) Мы пренебрегаем поглощением света в отражающих слоях и в толще пластинок.

будет иметь интенсивность $I_1'' = \rho I_1' = \rho^2 I_0$. В точке A_2 луч *1''* разделится на два луча — вышедший наружу луч *2* с интенсивностью $I_2 = (1-\rho)I_1'' = (1-\rho)\rho^2 I_0$ и отра-

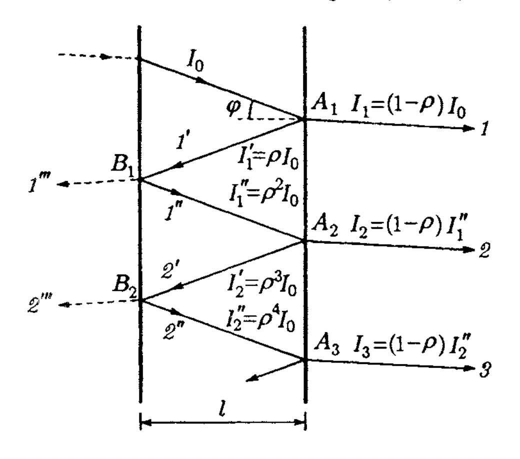


Рис. 4.21

женный луч *2'*, и т. д. Таким образом, для интенсивностей вышедших из прибора лучей *1*, *2*, *3*, ... имеет место соотношение

$$I_1 : I_2 : I_3 : \ldots = 1 : \rho^2 : \rho^4 : \ldots$$

Соответственно для амплитуд колебаний получается соотношение (ср. с (4.51))

$$A_1 : A_2 : A_3 : \ldots = 1 : \rho : \rho^2 : \ldots$$

Колебание в каждом из лучей *2*, *3*, *4*, ... отстает по фазе от колебания в предыдущем луче на одну и ту же величину δ, определяемую оптической разностью хода Δ, возникающей на пути A_1–B_1–A_2 либо A_2–B_2–A_3 и т. д. (см. рис. 4.21). Из рисунка видно, что $\Delta = 2l/\cos\varphi$, где φ — угол падения лучей на отражающие слои.

Если собрать лучи *1*, *2*, *3*, ... с помощью линзы в точке P фокальной плоскости (см. рис. 4.20), то колебания, создаваемые этими лучами, будут иметь вид (4.51). Следовательно, интенсивность в точке P определяется формулой (4.53), в которой ρ имеет смысл коэффициента отражения, а

$$\delta = \frac{2\pi}{\lambda}\frac{2l}{\cos\varphi}.$$

При пропускании сквозь прибор расходящегося пучка света в фокальной плоскости линзы возникают полосы равного наклона, имеющие вид резких колец (рис. 4.22).

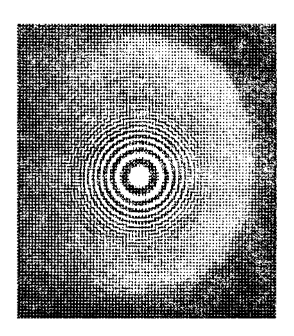


Рис 4.22

Интерферометр Фабри–Перо используется в спектроскопии для изучения тонкой структуры спектральных линий. Он нашел также широкое применение в метрологии для сравнения длины стандартного метра с длинами волн отдельных спектральных линий.

Глава 5
Дифракция света

5.1. Введение

Дифракцией называется совокупность явлений, наблюдаемых при распространении света в среде с резкими неоднородностями [1]) и связанных с отклонениями от законов геометрической оптики. Дифракция, в частности, приводит к огибанию световыми волнами препятствий и проникновению света в область геометрической тени. Огибание препятствий звуковыми волнами (т. е. дифракция звуковых волн) наблюдается постоянно в обыденной жизни. Для наблюдения дифракции световых волн необходимо создание специальных условий. Это обусловлено малостью длин световых волн. Мы знаем, что в пределе при $\lambda \to 0$ законы волновой оптики переходят в законы геометрической оптики. Следовательно, отклонения от законов геометрической оптики при прочих равных условиях оказываются тем меньше, чем меньше длина волны.

Между интерференцией и дифракцией нет существенного физического различия. Оба явления заключаются в перераспределении светового потока в результате суперпозиции волн. По историческим причинам перераспределение интенсивности, возникающее в результате суперпозиции волн, возбуждаемых конечным числом дискретных когерентных источников, принято называть интерференцией волн. Перераспределение интенсивности, возникающее вследствие суперпозиции волн, возбуждаемых когерентными источниками, расположенными непрерывно, принято называть дифракцией волн. Поэтому говорят, например, об интерференционной картине от двух узких щелей и о дифракционной картине от одной щели.

Наблюдение дифракции осуществляется обычно по следующей схеме. На пути световой волны, распространяющейся от некоторого источника, помещается непрозрачная

---

[1]) Например, вблизи границ непрозрачных или прозрачных тел, сквозь малые отверстия и т. п.

преграда, закрывающая часть волновой поверхности световой волны. За преградой располагается экран, на котором возникает дифракционная картина.

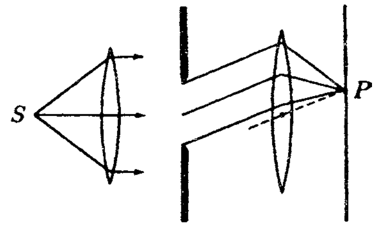


Рис. 5.1

Различают два вида дифракции. Если источник света S и точка наблюдения P расположены от препятствия настолько далеко, что лучи, падающие на препятствие, и лучи, идущие в точку P, образуют практически параллельные пучки, говорят о *дифракции в параллельных лучах*, или о *дифракции Фраунгофера*[2]). В противном случае говорят о *дифракции Френеля*. Дифракцию Фраунгофера можно наблюдать, поместив за источником света S и перед точкой наблюдения P по одной линзе так, чтобы точки S и P оказались в фокальной плоскости соответствующей линзы (рис. 5.1).

Критерий, позволяющий определить, с каким видом дифракции — Френеля или Фраунгофера — мы будем иметь дело в каждом конкретном случае, будет дан в § 5.5.

5.2. Принцип Гюйгенса–Френеля

Проникновение световых волн в область геометрической тени может быть объяснено с помощью принципа Гюйгенса (см. § 3.9). Однако этот принцип не дает сведений об амплитуде, а следовательно, и об интенсивности волн, распространяющихся в различных направлениях. Френель дополнил принцип Гюйгенса представлением об интерференции вторичных волн. Учет амплитуд и фаз вторичных волн позволяет найти амплитуду результирующей волны в любой точке пространства. Развитый таким способом принцип Гюйгенса получил название *принципа Гюйгенса–Френеля*.

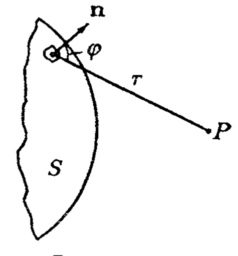


Рис. 5.2

[2]) Йозеф Фраунгофер (1787–1826) — немецкий физик.

Согласно принципу Гюйгенса–Френеля каждый элемент волновой поверхности S (рис. 5.2) служит источником вторичной сферической волны, амплитуда которой пропорциональна величине элемента dS. Амплитуда сферической волны убывает с расстоянием r от источника по закону $1/r$ (см. формулу (1.12)). Следовательно, от каждого участка dS волновой поверхности в точку P, лежащую перед этой поверхностью, приходит колебание

$$dE = K\frac{a_0 dS}{r}\cos(\omega t - kr + \alpha_0). \tag{5.1}$$

В этом выражении сумма $\omega t + \alpha_0$ есть фаза колебания в месте расположения волновой поверхности S, k — волновое число, r — расстояние от элемента поверхности dS до точки P. Множитель a_0 определяется амплитудой светового колебания в том месте, где находится dS. Коэффициент K зависит от угла φ между нормалью $\mathbf{n}$ к площадке dS и направлением от dS к точке P. При $\varphi = 0$ этот коэффициент максимален, при $\varphi = \pi/2$ он обращается в нуль.

Результирующее колебание в точке P представляет собой суперпозицию колебаний (5.1), взятых для всей волновой поверхности S:

$$E = \int\limits_S K(\varphi)\frac{a_0}{r}\cos(\omega t - kr + \alpha_0)\, dS. \tag{5.2}$$

Эта формула является аналитическим выражением принципа Гюйгенса–Френеля.

В обоснование принципа Гюйгенса–Френеля можно привести следующие соображения. Пусть на пути световой волны (для простоты мы будем считать ее плоской) поставлен непрозрачный тонкий экран Э (рис. 5.3). Всюду за экраном интенсивность света равна нулю. Это вызвано тем, что упавшая на экран световая волна возбуждает колебания электронов, имеющихся в материале экрана. Колеблющиеся электроны излучают электромагнитные волны. Поле за экраном представляет собой суперпозицию первичной (падающей на экран) волны и всех вторичных волн. Амплитуды и фазы вторичных волн ока-

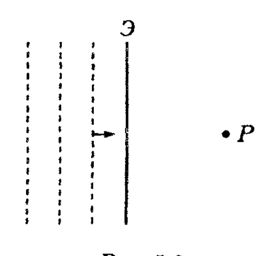


Рис. 5.3

зываются такими, что при суперпозиции этих волн с первичной волной в любой точке P за экраном получается нулевая амплитуда. Следовательно, если первичная волна создает в точке P колебание

$$A_{\text{перв}} \cos(\omega t + \alpha),$$

то результирующее колебание, возбуждаемое в той же точке вторичными волнами, имеет вид

$$A_{\text{втор}} \cos(\omega t + \alpha - \pi),$$

причем $A_{\text{втор}} = A_{\text{перв}}$.

Сказанное означает, что при вычислении амплитуды колебания, порождаемого в точке P световой волной, распространяющейся от реального источника, можно заменять этот источник совокупностью вторичных источников, расположенных вдоль волновой поверхности. А в этом и состоит суть принципа Гюйгенса–Френеля.

Разобьем непрозрачную преграду на две части. Одна из них, которую мы назовем пробкой, имеет конечные размеры и произвольную форму (круг, прямоугольник и т. п.). Другая часть включает всю остальную поверхность бесконечной преграды. Пока пробка на месте, результирующее колебание в точке P за преградой равно нулю. Его можно представить как сумму колебаний, создаваемых первичной волной, волной, порождаемой пробкой, и волной, порождаемой остальной частью преграды:

$$A_{\text{перв}} \cos(\omega t + \alpha) + A_{\text{проб}} \cos(\omega t + \alpha') + \\ + A_{\text{прегр}} \cos(\omega t + \alpha'') = 0. \quad (5.3)$$

Если убрать пробку, т. е. пропустить волну через отверстие в непрозрачной преграде, то колебание в точке P будет иметь вид

$$E_P = A_{\text{перв}} \cos(\omega t + \alpha) + A_{\text{прегр}} \cos(\omega t + \alpha'') = \\ = -A_{\text{проб}} \cos(\omega t + \alpha') = A_{\text{проб}} \cos(\omega t + \alpha' - \pi).$$

Мы воспользовались условием (5.3) и предположили, что удаление пробки не изменяет характер колебаний электронов в оставшейся части преграды.

Таким образом, можно считать, что колебания в точке P создаются совокупностью источников вторичных волн, расположенных на поверхности отверстия, образовавшегося после удаления пробки.

5.3. Зоны Френеля

Вычисления по формуле (5.2) представляют собой в общем случае очень трудную задачу. Однако, как показал Френель, в случаях, различающихся симметрией, нахождение амплитуды результирующего колебания может быть осуществлено простым алгебраическим или геометрическим суммированием.

Чтобы понять суть метода, разработанного Френелем, определим амплитуду светового колебания, возбуждаемого в точке P сферической волной, распространяющейся в изотропной однородной среде из точечного источника S (рис. 5.4). Волновые поверхности такой волны симметричны относительно прямой SP. Воспользовавшись этим, разобьем изображенную на рисунке волновую поверхность на кольцевые зоны, построенные так, что расстояния от краев каждой зоны до точки P различаются на

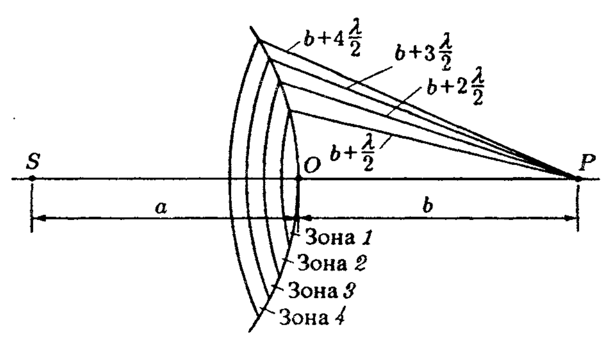


Рис. 5.4

$\lambda/2$ (λ — длина волны в той среде, в которой распространяется волна). Обладающие таким свойством зоны носят название **зон Френеля**.

Из рис. 5.4 видно, что расстояние b_m от внешнего края m-й зоны до точки P равно

$$b_m = b + m\frac{\lambda}{2} \tag{5.4}$$

(b — расстояние от вершины волновой поверхности O до точки P).

Колебания, приходящие в точку P от аналогичных точек двух соседних зон (т. е. от точек, лежащих в середине зон или у внешних краев зон и т. д.), находятся в

противофазе. Поэтому и результирующие колебания, создаваемые каждой из зон в целом, будут для соседних зон различаться по фазе на π.

Вычислим площади зон. Внешняя граница m-й зоны выделяет на волновой поверхности сферический сегмент

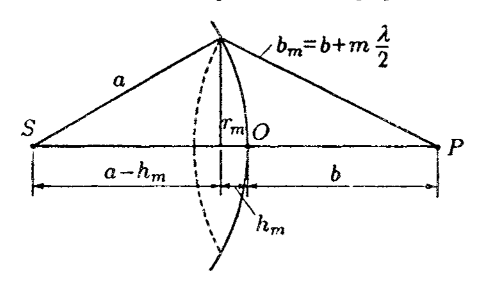


Рис. 5.5

высоты h_m (рис. 5.5). Обозначим площадь этого сегмента через S_m. Тогда площадь m-й зоны можно представить в виде

$$\Delta S_m = S_m - S_{m-1},$$

где S_{m-1} — площадь сферического сегмента, выделяемого внешней границей $(m-1)$-й зоны.

Из рис. 5.5 видно, что

$$r_m^2 = a^2 - (a - h_m)^2 = (b + m\lambda/2)^2 - (b + h_m)^2$$

(a — радиус волновой поверхности, r_m — радиус внешней границы m-й зоны). Возведя скобки в квадрат, получим

$$r_m^2 = 2ah_m - h_m^2 = bm\lambda + m^2(\lambda/2)^2 - 2bh_m - h_m^2. \quad (5.5)$$

Отсюда

$$h_m = \frac{bm\lambda + m^2(\lambda/2)^2}{2(a+b)}. \quad (5.6)$$

Ограничившись рассмотрением не слишком больших m, можно ввиду малости λ пренебречь слагаемым, содержащим λ^2. В этом приближении

$$h_m = \frac{bm\lambda}{2(a+b)}. \quad (5.7)$$

Площадь сферического сегмента равна $S = 2\pi Rh$ (R — радиус сферы, h — высота сегмента). Следовательно,

$$S_m = 2\pi a h_m = \frac{\pi ab}{a+b} m\lambda,$$

а площадь m-й зоны равна

$$\Delta S_m = S_m - S_{m-1} = \frac{\pi ab\lambda}{a+b}.$$

Полученное нами выражение не зависит от m. Это означает, что при не слишком больших m площади зон Френеля примерно одинаковы.

Из равенства (5.5) можно найти радиусы зон. При не слишком больших m высота сегмента $h_m \ll a$, поэтому можно считать, что $r_m^2 = 2ah_m$. Подставив значение (5.7) для h_m, получим для радиуса внешней границы m-й зоны выражение

$$r_m = \sqrt{\frac{ab}{a+b}m\lambda}. \tag{5.8}$$

Если положить $a = b = 1$ м и $\lambda = 0,5$ мкм, то для радиуса первой (центральной) зоны получается значение $r_1 = 0,5$ мм. Радиусы последующих зон возрастают как $\sqrt{m}$.

Итак, площади зон Френеля примерно одинаковы. Расстояние b_m от зоны до точки P медленно растет с номером зоны m. Угол φ между нормалью к элементам зоны и направлением на точку P также растет с m. Все это приводит к тому, что амплитуда A_m колебания, возбуждаемого m-й зоной в точке P, монотонно убывает с ростом m. Даже при очень больших m, когда площадь зоны начинает заметно расти с m (см. (5.6)), убывание множителя $K(\varphi)$ перевешивает рост ΔS_m, так что A_m продолжает убывать. Таким образом, амплитуды колебаний, возбуждаемых в точке P зонами Френеля, образуют монотонно убывающую последовательность

$$A_1 > A_2 > A_3 > \ldots > A_{m-1} > A_m > A_{m+1} > \ldots$$

Фазы колебаний, возбуждаемых соседними зонами, различаются на π. Поэтому амплитуда A результирующего колебания в точке P может быть представлена в виде

$$A = A_1 - A_2 + A_3 - A_4 + \ldots \tag{5.9}$$

В это выражение все амплитуды от нечетных зон входят с одним знаком, а от четных зон — с другим.

Запишем выражение (5.9) в виде

$$A = \frac{A_1}{2} + \left(\frac{A_1}{2} - A_2 + \frac{A_3}{2}\right) + \left(\frac{A_3}{2} - A_4 + \frac{A_5}{2}\right) + \ldots \tag{5.10}$$

Вследствие монотонного убывания A_m можно приближенно считать, что

$$A_m = \frac{A_{m-1} + A_{m+1}}{2}.$$

Тогда в формуле (5.10) выражения в скобках будут равны нулю, и она упрощается следующим образом:

$$A = A_1/2. \tag{5.11}$$

Согласно формуле (5.11) амплитуда, создаваемая в некоторой точке P всей сферической волновой поверхностью, равна половине амплитуды, создаваемой одной лишь центральной зоной. Если на пути волны поставить непрозрачный экран с отверстием, оставляющим открытой только центральную зону Френеля, амплитуда в точке P будет равна A_1, т. е. в два раза превзойдет амплитуду (5.11). Соответственно интенсивность света в точке P будет в этом случае в четыре раза больше, чем в отсутствие преград между точками S и P.

Теперь решим задачу о распространении света от источника S к точке P методом графического сложения амплитуд. Разобьем волновую поверхность на кольцевые зоны, аналогичные зонам Френеля, но гораздо меньшие по ширине (разность хода от краев зоны до точки P составляет одинаковую для всех зон малую долю λ). Колебание, создаваемое в точке P каждой из зон, изобразим в виде вектора, длина которого равна амплитуде колебания, а угол, образуемый вектором с направлением, принятым за начало отсчета, дает начальную фазу колебания (см. § 8.6 кн. 1). Амплитуда колебаний, создаваемых такими зонами в точке P, медленно убывает при переходе от зоны к зоне. Каждое следующее колебание отстает от предыдущего по фазе на одну и ту же величину. Следовательно, векторная диаграмма, получающаяся при сложении колебаний, возбуждаемых отдельными зонами, имеет вид, показанный на рис. 5.6.

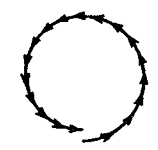


Рис. 5.6

Если бы амплитуды, создаваемые отдельными зонами, были одинаковыми, конец последнего из изображенных на рис. 5.6 векторов совпал бы с началом первого вектора. В действительности значение амплитуды, хотя и очень слабо, но убывает, вследствие чего векторы образуют не замкнутую фигуру, а ломаную спиралевидную линию.

В пределе при стремлении ширины кольцевых зон к нулю (количество их будет при этом неограниченно возрастать) векторная диаграмма примет вид спирали, закручивающейся к точке C (рис. 5.7). Фазы колебаний в точках O и 1 различаются на π (бесконечно малые векторы, образующие спираль, направлены в этих точках в противоположные стороны). Следовательно, участок спирали O–1 соответствует первой зоне Френеля. Вектор, проведенный из точки O в точку 1 (рис. 5.8*а*), изображает колебание, возбуждаемое в точке P этой зоны. Аналогично вектор, проведенный из точки 1 в точку 2 (рис. 5.8*б*), изображает колебание, возбуждаемое второй зоной Френеля. Колебания от первой и второй зон находятся в противофазе; в соответствии с этим векторы $O1$ и 12 направлены в противоположные стороны.

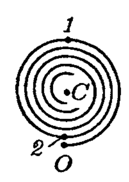


Рис. 5.7

Колебание, возбуждаемое в точке P всей волновой поверхностью, изображается вектором OC (рис. 5.8*в*). Из рисунка видно, что амплитуда в этом случае равна половине амплитуды, создаваемой первой зоной. Этот результат мы получили ранее алгебраически (см. формулу (5.11)). Заметим, что колебание, возбуждаемое внутрен-

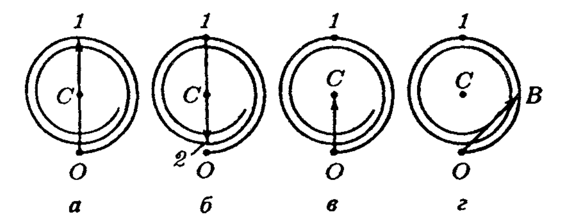


Рис. 5.8

ней половиной первой зоны Френеля, изображается вектором OB (рис. 5.8*г*). Таким образом, действие внутренней половины первой зоны Френеля не эквивалентно половине действия первой зоны. Вектор OB в $\sqrt{2}$ раз больше вектора OC. Следовательно, интенсивность света, создаваемая внутренней половиной первой зоны Френеля, в два раза превышает интенсивность, создаваемую всей волновой поверхностью.

Колебания от четных и нечетных зон Френеля находятся в противофазе и, следовательно, взаимно ослабляют

друг друга. Если поставить на пути световой волны пластинку, которая перекрывала бы все четные или нечетные зоны, то интенсивность света в точке P резко возрастает. Такая пластинка, называемая **зонной**, действует подобно собирающей линзе. На рис. 5.9 изображена пластинка, перекрывающая четные зоны. Еще большего эффекта можно достичь, не перекрывая четные (или нечетные) зоны, а изменяя фазу их колебаний на π. Это можно осуществить с помощью прозрачной пластинки, толщина которой в местах, соответствующих четным или нечетным зонам, отличается на надлежащим образом подобранную величину. Такая пластинка называется **фазовой зонной пластинкой**. По сравнению с перекрывающей зоны амплитудной зонной пластинкой фазовая дает дополнительное увеличение амплитуды в два раза, а интенсивности света — в четыре раза.

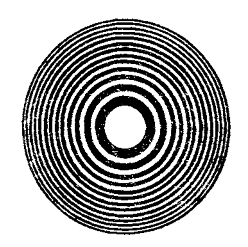


Рис. 5.9

5.4. Дифракция Френеля от простейших преград

Рассмотренные в предыдущем параграфе методы алгебраического и графического сложения амплитуд позволяют решить ряд задач на дифракцию света.

Дифракция от круглого отверстия. Поставим на пути сферической световой волны непрозрачный экран с вырезанным в нем круглым отверстием радиуса r_0. Расположим экран так, чтобы перпендикуляр, опущенный на него

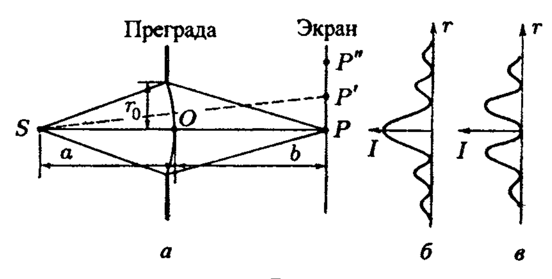


Рис. 5.10

из источника света S, попал в центр отверстия (рис. 5.10*а*). На продолжении этого перпендикуляра возьмем точку P.

При радиусе отверстия r_0, значительно меньшем, чем указанные на рисунке длины a и b, длину a можно считать равной расстоянию от источника S до преграды, а длину b — расстоянию от преграды до точки P. Если расстояния a и b удовлетворяют соотношению

$$r_0 = \sqrt{\frac{ab}{a+b} m\lambda}, \tag{5.12}$$

где m — целое число, то отверстие оставит открытыми ровно m первых зон Френеля, построенных для точки P (см. формулу (5.8)). Следовательно, число открытых зон Френеля определяется выражением

$$m = \frac{r_0^2}{\lambda}\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right). \tag{5.13}$$

В соответствии с (5.9) амплитуда в точке P будет равна

$$A = A_1 - A_2 + A_3 - A_4 + \ldots \pm A_m. \tag{5.14}$$

Перед A_m берется знак плюс, если m нечетное, и минус, если m четное. Представив (5.14) в виде, аналогичном (5.10), и положив в (5.13) выражения в скобках равными нулю, придем к формулам

$$A = \frac{A_1}{2} + \frac{A_m}{2} \qquad (m\text{— нечетное}),$$

$$A = \frac{A_1}{2} + \frac{A_{m-1}}{2} - A_m \quad (m\text{— четное}).$$

Амплитуды от двух соседних зон практически одинаковы. Поэтому $A_{m-1}/2 - A_m$ можно заменить на $-A_m/2$. В результате получится

$$A = \frac{A_1}{2} \pm \frac{A_m}{2}, \tag{5.15}$$

где знак плюс берется для нечетных m и минус — для четных.

Для малых m амплитуда A_m мало отличается от A_1. Следовательно, при нечетных m амплитуда в точке P будет приближенно равна A_1, при четных m — нулю. Этот результат легко получить с помощью векторной диаграммы, изображенной на рис. 5.7.

Если убрать преграду, амплитуда в точке P станет равной $A_1/2$ (см. (5.11)). Таким образом, преграда с отверстием, открывающим небольшое нечетное число зон,

не только не ослабляет освещенность в точке P, но, напротив, приводит к увеличению амплитуды почти в два раза, а интенсивности — почти в четыре раза.

Выясним характер дифракционной картины, которая будет наблюдаться на экране, помещенном за преградой (см. рис. 5.10). Вследствие симметричного расположения отверстия относительно прямой SP освещенность в разных точках экрана будет зависеть только от расстояния r от точки P. В самой этой точке интенсивность будет достигать максимума или минимума в зависимости от того, каким — четным или нечетным — будет число открытых зон Френеля. Пусть, например, это число равно трем. Тогда в центре дифракционной картины получится максимум интенсивности. Картина зон Френеля для точки P дана на рис. 5.11*а*. Теперь сместимся по экрану в точку P'. Ограниченная краями отверстия картина зон Френеля для точки P' имеет вид, показанный на рис. 5.11*б*. Края отверстия закроют часть зоны *3*, одновременно частично откроется зона *4*. В итоге интенсивность света уменьшится и при некотором положении точки P' достигнет минимума. Если сместиться по экрану в точку P'' (см. рис. 5.10*а*), края отверстия частично закроют не только зону *3*, но и зону *2* Френеля, одновременно откроется частично зона *5* (рис. 5.11*в*). В итоге действие открытых

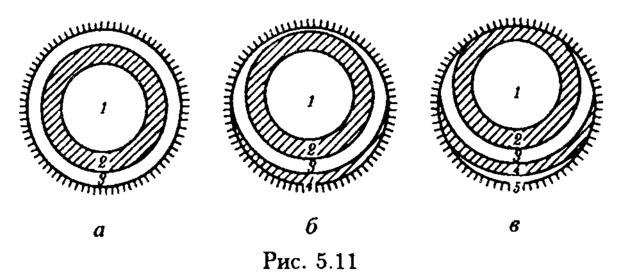
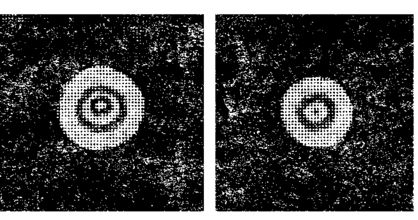


Рис. 5.11

участков нечетных зон перевесит действие открытых участков четных зон, и интенсивность достигнет максимума, правда, более слабого, чем максимум, наблюдающийся в точке P.

Таким образом, дифракционная картина от круглого отверстия имеет вид чередующихся светлых и темных концентрических колец. В центре картины будет либо светлое (m нечетное), либо темное (m четное) пятно (рис. 5.12). Ход интенсивности I с расстоянием r от цен-

тра картины изображен на рис. 5.10*б* (для нечетного m) и на рис. 5.10*в* (для четного m). При перемещении экрана параллельно самому себе вдоль прямой SP картины, изображенные на рис. 5.12, будут сменять друг друга (соглас-



Нечетное m Четное m

Рис. 5.12

но (5.13) при изменении b значение m становится то нечетным, то четным).

Если отверстие открывает лишь часть центральной зоны Френеля, на экране получается размытое светлое пятно; чередования светлых и темных колец в этом случае не возникает. Если отверстие открывает большое число зон, чередование светлых и темных колец наблюдается лишь в очень узкой области на границе геометрической тени; внутри этой области освещенность оказывается практически постоянной.

Дифракция от круглого диска. Поместим между источником света S и точкой наблюдения P непрозрачный круглый диск радиуса r_0 (рис. 5.13а). Если диск закроет m первых зон Френеля, амплитуда в точке P будет равна

$$A = A_{m+1} - A_{m+2} + A_{m+3} - \ldots = \frac{A_{m+1}}{2} + \left(\frac{A_{m+1}}{2} - A_{m+2} + \frac{A_{m+3}}{2}\right) + \ldots$$

Выражения, стоящие в скобках, можно положить равными нулю, следовательно,

$$A = A_{m+1}/2. \tag{5.16}$$

Выясним характер картины, получающейся на экране (см. рис. 5.13). Очевидно, что освещенность может зависеть только от расстояния r до точки P. При небольшом числе закрытых зон амплитуда A_{m+1} мало отличается от A_1. Поэтому интенсивность в точке P будет почти такая

же, как при отсутствии преграды между источником S и точкой P (см. (5.11)). Для точки P', смещенной относительно точки P в любом радиальном направлении, диск будет перекрывать часть $(m+1)$-й зоны Френеля, одновременно откроется часть m-й зоны. Это вызовет уменьшение интенсивности. При некотором положении точки P'

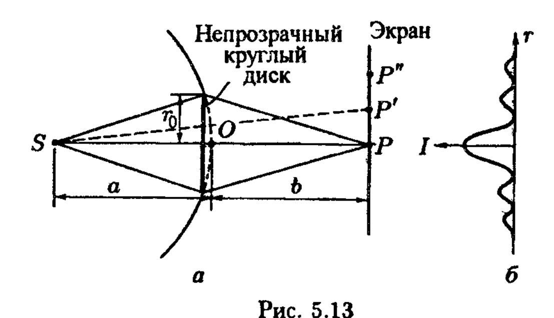


Рис. 5.13

интенсивность достигнет минимума. Если сместиться из центра картины еще дальше, диск перекроет дополнительно часть $(m + 2)$-й зоны, одновременно откроется часть $(m - 1)$-й зоны. В результате интенсивность возрастет и в точке P'' достигнет максимума.

Таким образом, в случае непрозрачного круглого диска дифракционная картина имеет вид чередующихся светлых и темных концентрических колец. В центре картины помещается светлое пятно (рис. 5.14). Изменение интенсивности света I с расстоянием r от точки P изображено на рис. 5.13 *б*.

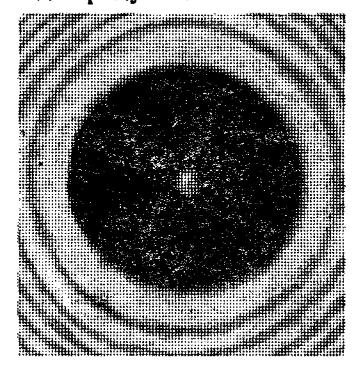


Рис. 5 14

Если диск закрывает лишь небольшую часть центральной зоны Френеля, он совсем не отбрасывает тени — освещенность экрана всюду остается такой же, как при отсутствии преград. Если диск закрывает много зон Френеля, чередование светлых и темных колец наблюдается только в узкой области на границе геометрической тени. В этом случае $A_{m+1} \ll A_1$, так что светлое пятно в

центре отсутствует и освещенность в области геометрической тени практически всюду равна нулю.

Светлое пятнышко в центре тени, отбрасываемой диском, послужило причиной инцидента, происшедшего между Пуассоном и Френелем. Парижская Академия наук предложила дифракцию света в качестве темы на премию за 1818 г. Устроители конкурса были сторонниками корпускулярной теории света и рассчитывали, что конкурсные работы принесут окончательную победу их теории. Однако Френелем была представлена работа, в которой все известные к тому времени оптические явления объяснялись с волновой точки зрения. Рассматривая эту работу, Пуассон, бывший членом конкурсной комиссии, обратил внимание на то, что из теории Френеля вытекает «нелепый» вывод: в центре тени, отбрасываемой небольшим круглым диском, должно находиться светлое пятно. Араго[3]) тут же произвел опыт и обнаружил, что такое пятно действительно имеется. Это принесло победу и всеобщее признание волновой теории света.

Дифракция от прямолинейного края полуплоскости. Поместим на пути световой волны (которую для простоты будем считать плоской) непрозрачную полуплоскость с прямолинейным краем. Расположим эту полуплоскость так, чтобы она совпала с одной из волновых поверхностей. На расстоянии b за полуплоскостью поставим параллельный ей экран, на котором возьмем точку P (рис. 5.15). Разобъем открытую часть волновой поверхности на зоны, имеющие вид очень узких прямолинейных полосок, параллельных краю полуплоскости. Ширину зон выберем так, чтобы отсчитанные в плоскости рисунка расстояния от точки P до краев любой зоны различались на одинаковую величину Δ. При этом условии колебания, создаваемые в точке P соседними зонами, будут различаться по фазе на постоянную величину.

Зонам, расположенным справа от точки P, припишем номера *1*, *2*, *3* и т. д., расположенным слева — номера *1*′, *2*′, *3*′ и т. д. Зоны с номерами m и m' имеют одинаковую ширину и расположены относительно точки P симметрично. Поэтому создаваемые ими в P колебания совпадают по амплитуде и по фазе.

Чтобы установить зависимость амплитуды от номера зоны m, оценим площади зон. Из рис. 5.16 видно, что

---

[3]) Доминик Франсуа Араго (1786–1853) — французский ученый.

суммарная ширина первых m зон равна

$$d_1 + d_2 + \ldots + d_m = \sqrt{(b+m\Delta)^2 - b^2} = \sqrt{2bm\Delta + m^2\Delta^2}.$$

Вследствие узости зон $\Delta \ll b$. Поэтому при не очень больших m квадратичным членом под корнем можно пренебречь. Тогда

$$d_1 + d_2 + \ldots + d_m = \sqrt{2bm\Delta}.$$

Положив в этой формуле $m = 1$, получим, что $d_1 = \sqrt{2b\Delta}$.

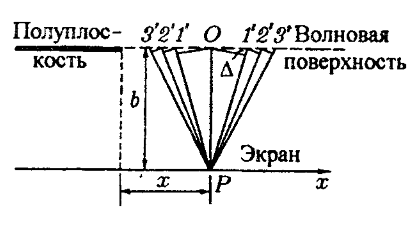


Рис. 5.15

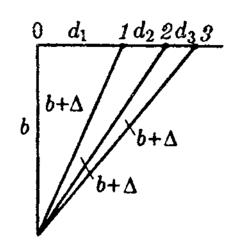


Рис. 5.16

Следовательно, выражению для суммарной ширины первых m зон можно придать вид

$$d_1 + d_2 + \ldots + d_m = d_1\sqrt{m}.$$

Отсюда

$$d_m = d_1(\sqrt{m} - \sqrt{m-1}). \qquad (5.17)$$

Расчет по формуле (5.17) дает

$$d_1 : d_2 : d_3 : d_4 : \ldots = 1 : 0,41 : 0,32 : 0,27 : \ldots \qquad (5.18)$$

В таких же соотношениях находятся и площади зон.

Из (5.18) вытекает, что амплитуда колебаний, создаваемых в точке P отдельными зонами, вначале (для первых зон) убывает очень быстро, затем это убывание становится медленным. По этой причине ломаная линия, получающаяся при графическом сложении колебаний, возбуждаемых прямолинейными зонами, идет сначала более полого, чем в случае кольцевых зон (площади которых при аналогичном построении примерно равны). На рис. 5.17 сопоставлены обе векторные диаграммы. В обоих случаях отставание по фазе каждого следующего колебания взято одним и тем же. Значение амплитуды для кольцевых зон

(рис. 5.17*а*) принято постоянным, а для прямолинейных зон (рис. 5.17*б*) — убывающим в соответствии с пропорцией (5.18). Графики на рис. 5.17 являются приближенными. При точном построении графиков нужно учиты-

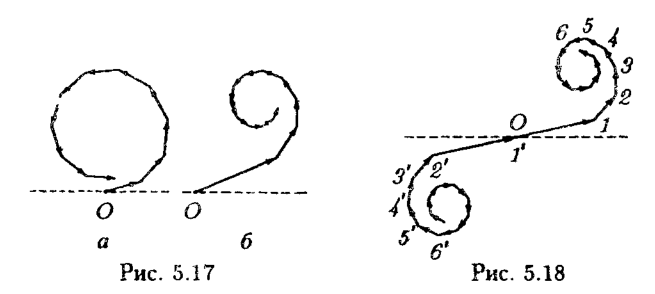


Рис. 5.17 Рис. 5.18

вать зависимость амплитуды от r и φ (см. (5.1)). Однако на общем характере диаграмм это не отразится.

На рис. 5.17*б* показаны только колебания, обусловленные зонами, лежащими справа от точки P. Зоны с номерами m и m' расположены симметрично относительно P. Поэтому естественно при построении диаграммы векторы, изображающие соответствующие этим зонам колебания, располагать симметрично относительно начала координат O (рис. 5.18). Если ширину зон устремить к нулю, ломаная линия, изображенная на рис. 5.18, превратится в плавную кривую (рис. 5.19), которая называется **спиралью Корню**[4]).

Уравнение спирали Корню в параметрической форме имеет вид

$$\xi = \int_0^v \cos\frac{\pi u^2}{2}\,du, \qquad \eta = \int_0^v \sin\frac{\pi u^2}{2}\,du. \tag{5.19}$$

Эти интегралы называются **интегралами Френеля**. Они не берутся в элементарных функциях, однако имеются таблицы, по которым можно находить значения интегралов для разных v. Смысл параметра v заключается в том, что $|v|$ дает длину дуги кривой Корню, измеряемую от начала координат.

Числа, отмеченные вдоль кривой на рис. 5.19, дают значения параметра v. Точки F_1 и F_2, к которым асимптотически приближается кривая при стремлении v к $+\infty$ и

[4]) Мари Альфред Корню (1841–1902) — французский физик.

$-\infty$, называются **фокусами** или **полюсами** спирали Корню. Их координаты равны

$$\xi = +1/2, \quad \eta = +1/2 \quad \text{для точки } F_1,$$
$$\xi = -1/2, \quad \eta = -1/2 \quad \text{для точки } F_2.$$

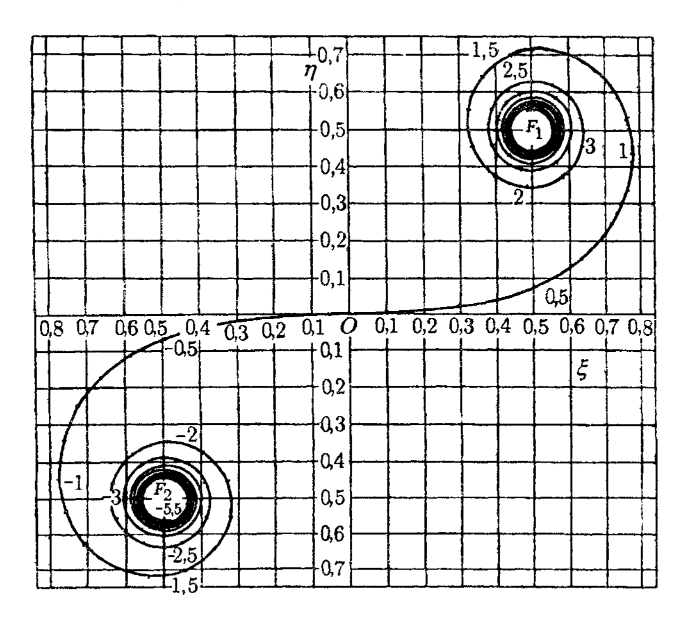


Рис. 5.19

Правый завиток спирали (участок OF_1) соответствует зонам, расположенным справа от точки P, левый завиток (участок OF_2) — зонам, расположенным слева от точки P.

Найдем производную $d\eta/d\xi$ в точке кривой, отвечающей данному значению параметра v. Согласно (5.19) приращению v на dv соответствует

$$d\xi = \cos\frac{\pi v^2}{2}\,dv, \quad d\eta = \sin\frac{\pi v^2}{2}\,dv.$$

Следовательно, $d\eta/d\xi = \operatorname{tg}(\pi v^2/2)$. Вместе с тем $d\eta/d\xi = \operatorname{tg}\vartheta$, где ϑ — угол наклона касательной к кривой в данной точке. Таким образом,

$$\vartheta = \frac{\pi}{2}v^2. \tag{5.20}$$

Отсюда следует, что в точке, отвечающей $v = 1$, касательная к кривой Корню перпендикулярна к оси ξ. При $v = 2$ угол ϑ равен 2π, так что касательная параллельна оси ξ. При $v = 3$ угол ϑ равен $9\pi/2$, так что касательная снова перпендикулярна к оси ξ, и т. д.

Спираль Корню дает возможность найти амплитуду светового колебания в любой точке экрана. Положение точки будем характеризовать координатой x, отсчитываемой от границы геометрической тени (см. рис. 5.15). Между значением параметра v, отвечающим краю геометрической тени, и координатой x точки наблюдения имеется соотношение

$$v = -x\sqrt{2/(b\lambda)}.$$

Для точки, лежащей на границе геометрической тени ($x = 0$), все штрихованные зоны будут закрыты. Колебаниям от нештрихованных зон соответствует правый завиток спирали. Следовательно, результирующее колебание изобразится вектором, начало которого находится в точке O, а конец — в точке F_1 (рис. 5.20 *а*). При смещении точ-

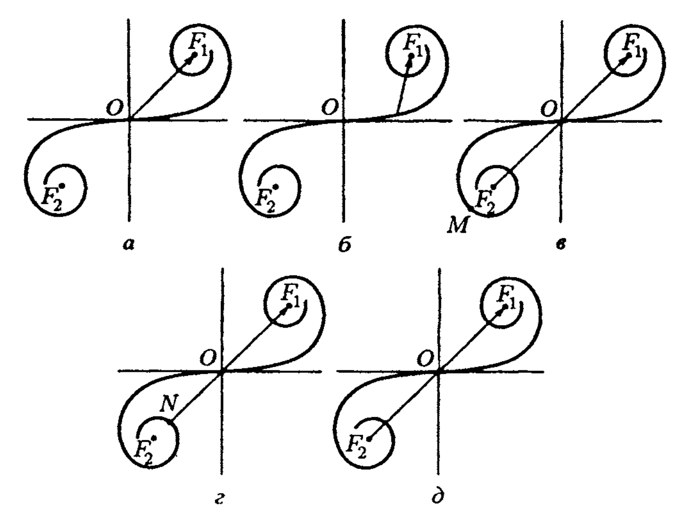


Рис. 5.20

ки P в область геометрической тени полуплоскость закрывает все большее число нештрихованных зон. Поэтому на-

чало результирующего вектора перемещается по правому завитку в направлении полюса F_1 (рис. 5.20 *б*). В результате амплитуда колебания монотонно стремится к нулю.

Если точка P смещается от границы геометрической тени вправо, в дополнение к нештрихованным зонам открывается все возрастающее число штрихованных зон. Поэтому начало результирующего вектора скользит по левому завитку спирали в направлении к полюсу F_2. При этом амплитуда проходит через ряд максимумов (первый из них равен длине отразка MF_1 на рис. 5.20 *в*) и минимумов (первый из них равен длине отрезка NF_1 на рис. 5.20 *г*). При полностью открытой волновой поверхности амплитуда равна длине отрезка F_2F_1 (рис. 5.20 *д*), т. е. ровно в два раза превышает амплитуду на границе геометрической тени (см. рис. 5.20 *а*). Соответственно интенсивность на границе геометрической тени составляет 1/4 интенсивности I_0, получающейся на экране в отсутствие преград.

Зависимость интенсивности света I от координаты x дана на рис. 5.21. Из рисунка видно, что при переходе в

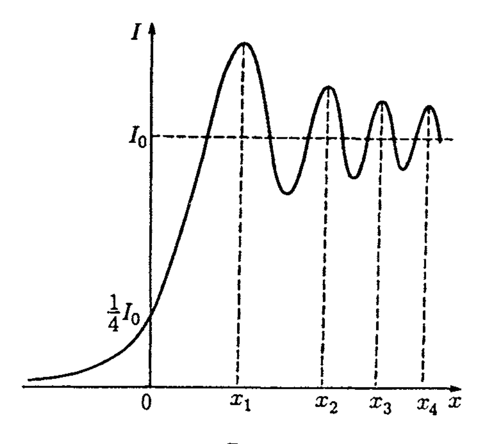


Рис. 5.21

область геометрической тени интенсивность изменяется не скачком, а постепенно стремится к нулю. Справа от границы геометрической тени расположен ряд чередующихся максимумов и минимумов интенсивности. Вычисления показывают, что при $b = 1$ м и $\lambda = 0,5$ мкм координаты максимумов (см. рис. 5.21) имеют следующие

значения: $x_1 = 0,61$ мм, $x_2 = 1,17$ мм, $x_3 = 1,54$ мм, $x_4 = 1,85$ мм и т. д. С изменением расстояния b от полуплоскости до экрана значения координат максимумов и минимумов изменяются как $\sqrt{b}$. Из приведенных данных следует, что максимумы располагаются довольно густо. С помощью кривой Корню можно также найти относительную величину интенсивности в максимумах и минимумах. Для первого максимума получается значение 1,37 I_0, для первого минимума 0,78 I_0.

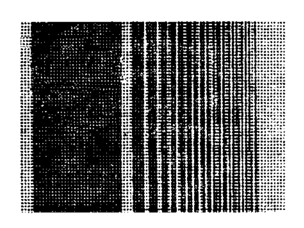


Рис. 5.22

На рис. 5.22 приведена фотография дифракционной картины от края полуплоскости.

Дифракция от щели. Бесконечно длинную щель можно образовать, расположив рядом две обращенные в разные стороны полуплоскости. Следовательно, задача о дифракции Френеля от щели может быть решена с помощью спирали Корню. Волновую поверхность падающего света, плоскость щели и экран, на котором наблюдается дифракционная картина, будем считать параллельными друг другу (рис. 5.23).

Для точки P, лежащей против середины щели, начало и конец результирующего вектора находятся в симметричных относительно начала координат точках спирали (рис. 5.24). Если сместиться в точку P', лежащую против края щели, начало результирующего вектора переместится в середину спирали O. Конец вектора, пере-

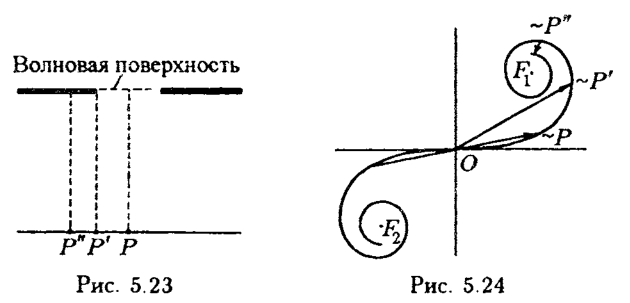


Рис. 5.23 Рис. 5.24

местится по спирали в направлении полюса F_1. При углублении в область геометрической тени начало и конец результирующего вектора будут скользить по спирали и в

конце концов окажутся на наименьшем расстоянии друг от друга (см. на рис. 5.24 вектор, соответствующий точке P''). Интенсивность света достигнет при этом минимума. При дальнейшем скольжении по спирали начало и конец вектора снова отойдут друг от друга и интенсивность будет расти. То же самое будет происходить при смещении из точки P в противоположную сторону, так как дифракционная картина симметрична относительно середины щели.

Если изменять ширину щели, сдвигая полуплоскости в противоположные стороны, интенсивность в средней точке P будет пульсировать, проходя попеременно через максимумы (рис. 5.25 *а*) и отличные от нуля минимумы (рис. 5.25 *б*).

Итак, френелевская дифракционная картина от щели представляет собой либо светлую (в случае, изображенном на рис. 5.25 *а*), либо относительно темную (в случае, изображенном на рис. 5.25 *б*) центральную полосу, по обе стороны которой располагаются симметричные относительно нее чередующиеся темные и светлые полосы.

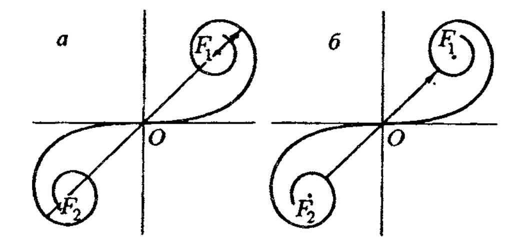


Рис. 5.25

При большой ширине щели начало и конец результирующего вектора для точки P лежат на внутренних витках спирали вблизи полюсов F_1 и F_2. Поэтому интенсивность света в точках, расположенных против щели, будет практически постоянной. Только на границах геометрической тени образуется система густо расположенных узких светлых и темных полос.

Заметим, что все полученные в данном параграфе результаты справедливы при условии, что радиус когерентности падающей на преграду световой волны намного превосходит характерный размер преграды (диаметр отверстия или диска, ширину щели и т. п.).

5.5. Дифракция Фраунгофера от щели

Пусть на бесконечно длинную[5]) щель падает плоская световая волна (рис. 5.26). Поместим за щелью собирающую линзу, а в фокальной плоскости линзы — экран. Волновая поверхность падающей волны, плоскость щели и экран параллельны друг другу. Поскольку щель бесконечна, картина, наблюдаемая в любой плоскости, перпендикулярной к щели, будет одинакова. Поэтому достаточно исследовать характер картины в одной такой плоскости, например в плоскости рис. 5.26. Все вводимые в дальнейшем величины, в частности угол φ, образуемый лучом с оптической осью линзы, относятся к этой плоскости.

Разобьем открытую часть волновой поверхности на параллельные краям щели элементарные зоны ширины dx. Вторичные волны, посылаемые зонами в направлении, определяемом углом φ, соберутся в точке экрана P. Каждая элементарная зона создаст в точке P колебание dE. Линза собирает в фокальной плоскости плоские (а не сферические) волны. Поэтому множитель $1/r$ в выражении (5.1) для dE в случае дифракции Фраунгофера будет отсутствовать. Ограничившись рассмотрением не слишком больших углов φ, можно коэффициент K в формуле (5.1) считать постоянным. Тогда амплитуда колебания, возбуждаемого зоной в любой точке экрана, будет зависеть только от площади зоны. Площадь пропорциональна ширине зоны dx. Следовательно, амплитуда dA колебания dE, возбуждаемого зоной ширины dx в любой точке экрана, имеет вид $dA = C\,dx$, где C — константа.

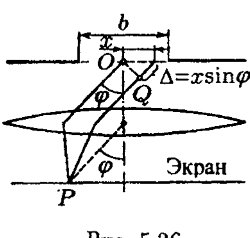


Рис. 5.26

Обозначим алгебраическую сумму амплитуд колебаний, возбуждаемых в некоторой точке экрана всеми зонами, через A_0. Ее можно найти, проинтегрировав dA по всей ширине щели b:

$$A_0 = \int dA = \int_0^b C\,dx = Cb.$$

[5]) Практически достаточно, чтобы длина щели была во много раз больше, чем ее ширина.

Отсюда $C = A_0/b$, и, следовательно,

$$dA = \frac{A_0}{b}\,dx.$$

Теперь определим фазовые соотношения между колебаниями dE. Сопоставим фазы колебаний, возбуждаемых в точке P элементарными зонами с координатами O и x (см. рис. 5.26). Оптические пути OP и QP таутохронны (см. рис. 3.21). Поэтому разность фаз между рассматриваемыми колебаниями образуется на пути Δ, равном $x \sin\varphi$. Если начальную фазу колебания, возбуждаемого в точке P элементарной зоной, находящейся в середине щели ($x = 0$), положить равной нулю, то начальная фаза колебания, возбуждаемого зоной с координатой x, будет равна

$$-2\pi\frac{\Delta}{\lambda} = -\frac{2\pi}{\lambda}x\sin\varphi$$

(λ — длина волны в данной среде).

Таким образом, колебание, возбуждаемое элементарной зоной с координатой x в точке P (положение которой определяется углом φ), может быть представлено в виде

$$dE_\varphi = \left(\frac{A_0}{b}\,dx\right)\exp\left[i\left(\omega t - \frac{2\pi}{\lambda}x\sin\varphi\right)\right] \qquad (5.21)$$

(имеется в виду вещественная часть этого выражения).

Проинтегрировав выражение (5.21) по всей ширине щели, найдем результирующее колебание, возбуждаемое в точке P открываемым щелью участком волновой поверхности:

$$E_\varphi = \int\limits_{-b/2}^{+b/2}\frac{A_0}{b}\exp\left[i\left(\omega t - \frac{2\pi}{\lambda}x\sin\varphi\right)\right]dx$$

Вынесем множители, не зависящие от x, за знак интеграла. Кроме того, введем обозначение

$$\gamma = \frac{\pi}{\lambda}\sin\varphi. \qquad (5.22)$$

В результате получим

$$E_\varphi = \frac{A_0}{b} = \exp(i\omega t)\int\limits_{-b/2}^{+b/2}\exp(-2i\gamma x)\,dx =$$

$$= \frac{A_0}{b}\exp(i\omega t)\,\frac{1}{(-2i\gamma)}\exp(-2i\gamma x)\Big|_{-b/2}^{+b/2} =$$

$$= \exp(i\omega t)\left\{\frac{A_0}{\gamma b}\cdot\frac{1}{(-2i)}\left[\exp(-i\gamma b) - \exp(i\gamma b)\right]\right\} =$$

$$= \exp(i\omega t)\left\{\frac{A_0}{\gamma b}\cdot\frac{1}{2i}\left[\exp(i\gamma b) - \exp(-i\gamma b)\right]\right\}.$$

Выражение в фигурных скобках определяет комплексную амплитуду $\hat{A}_\varphi$ результирующего колебания. Приняв во внимание, что разность экспонент, деленная на $2i$, представляет собой $\sin\gamma b$ [6]), можно написать

$$\hat{A}_\varphi = A_0\frac{\sin(\gamma b)}{\gamma b} = A_0\frac{\sin(\pi b\sin\varphi/\lambda)}{\pi b\sin\varphi/\lambda} \qquad (5.23)$$

(мы подставили значение (5.22) для γ).

Выражение (5.23) является вещественным. Его модуль представляет собой обычную амплитуду результирующего колебания:

$$A_\varphi = \left|A_0\frac{\sin(\pi b\sin\varphi/\lambda)}{\pi b\sin\varphi/\lambda}\right|. \qquad (5.24)$$

Для точки, лежащей против центра линзы, $\varphi = 0$. Подстановка этого значения в формулу (5.24) дает для амплитуды [7]) значение A_0. Этот результат можно получить более простым путем. При $\varphi = 0$ колебания от всех элементарных зон приходят в точку P в одинаковой фазе. Поэтому амплитуда результирующего колебания равна алгебраической сумме амплитуд складываемых колебаний.

При значениях φ, удовлетворяющих условию: $\pi b\sin\varphi/\lambda = \pm k\pi$, т. е. в случае, если

$$b\sin\varphi = \pm k\lambda \quad (k = 1, 2, 3, \ldots), \qquad (5.25)$$

[6]) См. § 8.2 кн. 1.

[7]) Напомним, что $\lim\limits_{u\to 0}(\sin u/u) = 1$ (при малых u можно полагать $\sin u \approx u$).

амплитуда A_φ обращается в нуль. Таким образом, условие (5.25) определяет положения минимумов интенсивности. Отметим, что $b\sin\varphi$ представляет собой разность хода Δ лучей, идущих в точку P от краев щели (см. рис. 5.26).

Условие (5.25) легко получить из следующих соображений. Если разность хода Δ от краев щели равна $\pm k\lambda$, открытую часть волновой поверхности можно разбить на $2k$ равных по ширине зон, причем разность хода от краев каждой зоны будет равна $\lambda/2$ (рис. 5.27, выполненный для $k = 2$). Колебания от каждой пары соседних зон взаимно погашают друг друга, так что результирующая амплитуда равна нулю. Если для точки P разность хода Δ равна $\pm(k + 1/2)\lambda$, число зон будет нечетным, действие одной из них окажется некомпенсированным и наблюдается максимум интенсивности.

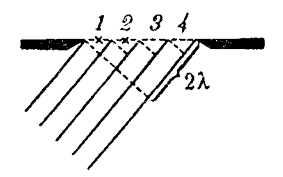


Рис. 5.27

Интенсивность света пропорциональна квадрату амплитуды. Следовательно, в соответствии с (5.24)

$$I_\varphi = I_0 \frac{\sin^2(\pi b \sin\varphi/\lambda)}{(\pi b \sin\varphi/\lambda)^2}, \tag{5.26}$$

где I_0 — интенсивность в середине дифракционной картины (против центра линзы), I_φ — интенсивность в точке, положение которой определяется данным значением φ.

Из формулы (5.26) получается, что $I_{-\varphi} = I_\varphi$. Это означает, что дифракционная картина симметрична относительно центра линзы. Заметим, что при смещении щели параллельно экрану (вдоль оси x на рис. 5.26) дифракционная картина, наблюдаемая на экране, остается неподвижной (ее середина лежит против центра линзы). Напротив, смещение линзы при неподвижной щели сопровождается таким же смещением картины на экране.

График функции (5.26) изображен на рис. 5.28 По оси абсцисс отложены значения $\sin\varphi$, по оси ординат — интенсивность I_φ. Количество минимумов интенсивности определяется отношением ширины щели b к длине волны λ. Из условия (5.25) следует, что $\sin\varphi = \pm k\lambda/b$. Модуль $\sin\varphi$ не может превысить единицу. Поэтому $k\lambda/b \le 1$, откуда

$$k \le b/\lambda. \tag{5.27}$$

При ширине щели, меньшей длины волны, минимумы вообще не возникают. В этом случае интенсивность света монотонно убывает от середины картины к ее краям.

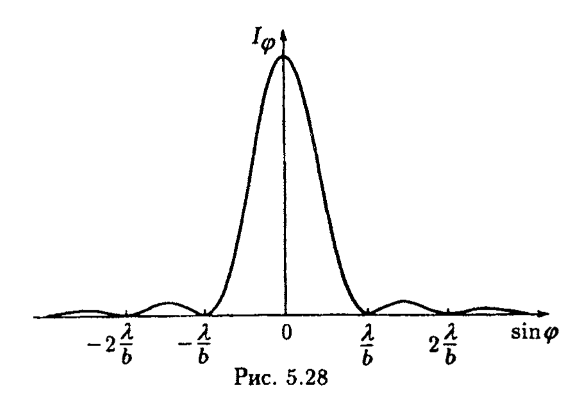


Рис. 5.28

Краям центрального максимума соответствуют значения угла φ, получающиеся из условия $b\sin\varphi = \pm\lambda$. Эти значения равны $\pm\arcsin(\lambda/b)$. Следовательно, угловая ширина центрального максимума равна

$$\delta\varphi = 2\arcsin(\lambda/b). \qquad (5.28)$$

В случае, когда $b \gg \lambda$, значение $\sin(\lambda/b)$ можно положить равным (λ/b). Тогда формула для угловой ширины центрального максимума упрощается следующим образом:

$$\delta\varphi = 2\lambda/b. \qquad (5.29)$$

Решим задачу о дифракции Фраунгофера от щели методом графического сложения амплитуд. Разобьем открытую часть волновой поверхности на очень узкие зоны одинаковой ширины. Колебание, возбуждаемое каждой такой зоной, имеет одинаковую амплитуду ΔA и отстает по фазе от предыдущего колебания на одну и ту же величину δ, зависящую от угла φ, определяющего направление на точку наблюдения P. При $\varphi = 0$ разность фаз δ равна нулю и векторная диаграмма имеет вид, показанный на рис. 5.29 *а*. Амплитуда результирующего колебания A_0 равна сумме амплитуд складываемых колебаний. Если $\Delta = b\sin\varphi = \lambda/2$, колебания от краев щели находятся в противофазе. Соответственно векторы $\Delta\mathbf{A}$ располагаются вдоль полуокружности длиной A_0 (рис. 5.29 *б*). Следовательно, результирующая амплитуда равна $2A_0/\pi$. В

случае, когда $\Delta = b\sin\varphi = \lambda$, колебания от краев щели различаются по фазе на 2π. Соответствующая векторная диаграмма изображена на рис. 5.29 *в*. Векторы $\Delta\mathbf{A}$ располагаются вдоль окружности длиной A_0. Результирующая амплитуда равна нулю — получается первый минимум. Первый максимум получается при $\Delta = b\sin\varphi = 3\lambda/2$. В этом случае колебания от краев щели различаются по фазе на 3π. Строя последовательно векторы $\Delta\mathbf{A}$, мы обойдем полтора раза окружность диаметра

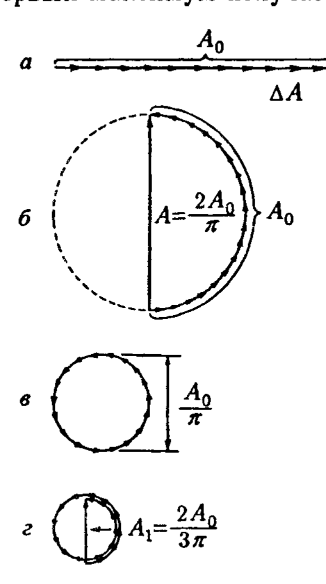


Рис. 5.29

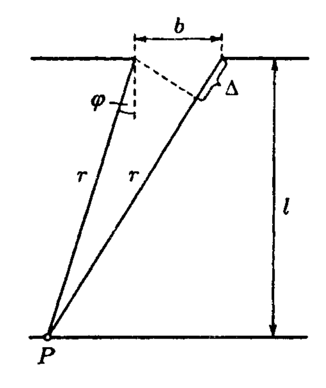


Рис. 5.30

$A_1 = (2/3\pi)A_0$ (рис. 5.29 *г*). Диаметр этой окружности и есть амплитуда первого максимума. Таким образом, интенсивность первого максимума равна $I_1 = (2/3\pi)^2 I_0 \approx$ $\approx 0,045 I_0$. Аналогично можно найти и относительную интенсивность остальных максимумов. В итоге получится следующее соотношение:

$$I_0 : I_1 : I_2 : I_3 : \ldots = 1 : \left(\frac{2}{3\pi}\right)^2 : \left(\frac{2}{5\pi}\right)^2 : \left(\frac{2}{7\pi}\right)^2 : \ldots =$$

$$= 1 : 0,045 : 0,016 : 0,008 : \ldots \qquad (5.30)$$

Таким образом, центральный максимум значительно превосходит по интенсивности остальные максимумы; в нем сосредоточивается основная доля светового потока, проходящего через щель.

В случае, когда ширина щели очень мала по сравнению с расстоянием от щели до экрана, лучи, идущие в точку P от краев щели, будут практически параллельными и в отсутствие линзы между щелью и экраном. Следовательно, при падении на щель плоской волны будет наблюдаться дифракция Фраунгофера. Все полученные выше формулы будут справедливыми, причем под φ в этих формулах следует понимать угол между направлением от любого края щели к точке P и нормалью к плоскости щели.

Установим количественный критерий, позволяющий определить, какой вид дифракции будет иметь место в каждом конкретном случае. Найдем разность хода лучей от краев щели до точки P (рис. 5.30). Применим теорему косинусов к треугольнику со сторонами r, $r+\Delta$ и b:

$$(r+\Delta)^2 = r^2 + b^2 - 2rb\cos(\pi/2+\varphi).$$

После несложных преобразований получим

$$2r\Delta + \Delta^2 = b^2 + 2rb\sin\varphi. \qquad (5.31)$$

Нас интересует случай, когда лучи, идущие от краев щели в точку P, почти параллельны. При этом условии $\Delta^2 \ll r\Delta$, поэтому в уравнении (5.31) можно пренебречь слагаемым Δ^2. В этом приближении

$$\Delta = \frac{b^2}{2r} + b\sin\varphi. \qquad (5.32)$$

В пределе при $r \to \infty$ получается значение разности хода $\Delta_\infty = b\sin\varphi$, совпадающее с выражением, фигурирующим в формуле (5.25).

При конечных r характер дифракционной картины будет определяться соотношением между разностью $\Delta - \Delta_\infty$ и длиной волны λ. Если

$$\Delta - \Delta_\infty \ll \lambda, \qquad (5.33)$$

дифракционная картина будет практически такой, как в случае дифракции Фраунгофера. При разности $\Delta - \Delta_\infty$, сравнимой с λ ($\Delta - \Delta_\infty \sim \lambda$), будет иметь место дифракция Френеля.

Из (5.32) следует, что

$$\Delta - \Delta_\infty = \frac{b^2}{2r} \sim \frac{b^2}{l}$$

(l — расстояние от щели до экрана). Подстановка этого выражения в (5.33) приводит к условию $b^2/l \ll \lambda$, или

$$\frac{b^2}{l\lambda} \ll 1. \tag{5.34}$$

Таким образом, характер дифракции зависит от значения безразмерного параметра

$$b^2/(l\lambda). \tag{5.35}$$

Если этот параметр много меньше единицы, наблюдается дифракция Фраунгофера, если он порядка единицы — дифракция Френеля; наконец, если этот параметр много больше единицы, оказывается применимым приближение геометрической оптики. Для удобства сопоставления представим сказанное в следующем виде:

$$\frac{b^2}{l\lambda}\begin{cases} \ll 1 \text{ — дифракция Фраунгофера,} \\ \sim 1 \text{ — дифракция Френеля,} \\ \gg 1 \text{ — геометрического оптика.}\end{cases} \tag{5.36}$$

Параметру (5.35) можно дать наглядное истолкование. Возьмем точку P, лежащую против середины щели (рис. 5.31). Для этой точки число m открываемых щелью зон Френеля определяется соотношением

$$(l + m\lambda/2)^2 = l^2 + (b/2)^2.$$

Раскрыв скобки и отбросив слагаемое, пропорциональное λ^2, получим [8])

$$m = \frac{b^2}{4l\lambda} \sim \frac{b^2}{l\lambda}. \tag{5.37}$$

Рис. 5.31

Таким образом, параметр (5.35) непосредственно связан с числом открытых зон Френеля (для точки, лежащей против середины щели).

Если щель открывает малую долю центральной зоны Френеля ($m \ll 1$), наблюдается дифракция Фраунгофера. Распределение интенсивности в этом случае изображается кривой, приведенной на рис. 5.28. Если щель открывает небольшое число зон Френеля ($m \sim 1$), на экране получается изображение щели, обрамленное по краям отчетливо

[8]) Отметим, что для точек, сильно смещенных в область геометрической тени, число открытых зон будет меньше.

видимыми светлыми и темными полосами. Наконец, в случае, когда щель открывает большое число зон Френеля ($m \gg 1$), на экране получается равномерно освещенное изображение щели. Лишь у границ геометрической тени имеются практически неразличимые глазом очень узкие чередующиеся более светлые и более темные полосы.

Проследим за видоизменениями картины при удалении экрана от щели. При небольших расстояниях экрана от щели (когда $m \gg 1$) изображение соответствует законам геометрической оптики. Увеличивая расстояние, мы придем сначала к френелевской дифракционной картине, которая затем перейдет во фраунгоферовскую картину. Та же последовательность превращений наблюдается в том случае, если, не изменяя расстояния l, уменьшать ширину щели b.

Из сказанного ясно, что критерием применимости геометрической оптики является не малость длины волны по сравнению с характерным размером преграды (например, шириной щели), а значение параметра (5.35) (он должен быть много больше единицы). Пусть, например, оба отношения b/λ и l/b равны 100. В этом случае $\lambda \ll b$, однако $b^2/(l\lambda) = 1$ и, следовательно, будет наблюдаться отчетливо выраженная френелевская дифракция.

5.6. Дифракционная решетка

Дифракционной решеткой называется совокупность большого числа одинаковых, отстоящих друг от друга на одно и то же расстояние щелей (рис. 5.32). Расстояние d между серединами соседних щелей называется периодом решетки.

Расположим параллельно решетке собирающую линзу, в фокальной плоскости которой поставим экран. Выясним характер дифракционной картины, получающейся на экране при падении на решетку плоской световой волны (для простоты будем считать, что волна падает на решетку нормально). Каждая из щелей даст на экране картину, описываемую кривой, изображенной на рис. 5.28. Картины от всех щелей придутся

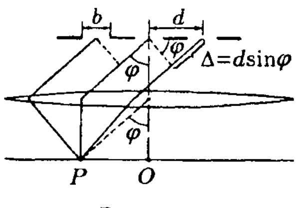


Рис. 5.32

на одно и то же место экрана (независимо от положения щели, центральный максимум лежит против центра линзы). Если бы колебания, приходящие в точку P от различных щелей, были некогерентными, результирующая картина от N щелей отличалась бы от картины, создаваемой одной щелью, лишь тем, что все интенсивности возросли бы в N раз. Однако колебания от различных щелей являются в большей или меньшей степени когерентными; поэтому результирующая интенсивность будет отлична от NI_φ (I_φ — интенсивность, создаваемая одной щелью; см. (5.26)).

В дальнейшем мы будем предполагать, что радиус когерентности падающей волны намного превышает длину решетки, так что колебания от всех щелей можно считать когерентными относительно друг друга. В этом случае результирующее колебание в точке P, положение которой определяется углом φ, представляет собой сумму N колебаний с одинаковой амплитудой A_φ, сдвинутых относительно друг друга по фазе на одну и ту же величину δ. Согласно формуле (4.47) интенсивность при этих условиях равна

$$I_{\text{реш}} = I_\varphi \frac{\sin^2(N\delta/2)}{\sin^2(\delta/2)} \tag{5.38}$$

(в данном случае роль I_0 играет I_φ).

Из рис. 5.32 видно, что разность хода от соседних щелей равна $\Delta = d\sin\varphi$. Следовательно, разность фаз

$$\delta = 2\pi\frac{\Delta}{\lambda} = \frac{2\pi}{\lambda}d\sin\varphi, \tag{5.39}$$

где λ — длина волны в данной среде.

Подставив в формулу (5.38) выражение (5.26) для I_φ и (5.39) для δ, получим

$$I_{\text{реш}} = I_0\frac{\sin^2(\pi b\sin\varphi/\lambda)}{(\pi b\sin\varphi/\lambda)^2}\frac{\sin^2(N\pi d\sin\varphi/\lambda)}{\sin^2(\pi d\sin\varphi/\lambda)} \tag{5.40}$$

(I_0 — интенсивность, создаваемая одной щелью против центра линзы).

Первый множитель в (5.40) обращается в нуль в точках, для которых

$$b\sin\varphi = \pm k\lambda \quad (k = 1, 2, 3, \ldots). \tag{5.41}$$

В этих точках интенсивность, создаваемая каждой из щелей в отдельности, равна нулю (см. условие (5.25)).

Второй множитель в (5.40) принимает значение N^2 в точках, удовлетворяющих условию

$$d \sin\varphi = \pm m\lambda \quad (m = 0, 1, 2, \ldots) \tag{5.42}$$

(см. (4.49)). Для направлений, определяемых этим условием, колебания от отдельных щелей взаимно усиливают друг друга, вследствие чего амплитуда колебаний в соответствующей точке экрана равна

$$A_{\max} = N A_\varphi \tag{5.43}$$

(A_φ — амплитуда колебания, посылаемого одной щелью под углом φ).

Условие (5.42) определяет положения максимумов интенсивности, называемых *главными*. Число m дает *порядок* главного максимума. Максимум нулевого порядка только один, максимумов 1-го, 2-го и т. д. порядков имеется по два.

Возведя равенство (5.43) в квадрат, получим, что интенсивность главных максимумов $I_{\max}$ в N^2 раз больше интенсивности I_φ, создаваемой в направлении φ одной щелью:

$$I_{\max} = N^2 I_\varphi. \tag{5.44}$$

Кроме минимумов, определяемых условием (5.41), в промежутках между соседними главными максимумами имеется $N - 1$ добавочных минимумов. Эти минимумы возникают в тех направлениях, для которых колебания от отдельных щелей взаимно погашают друг друга. В соответствии с формулой (4.50) направления добавочных минимумов определяются условием

$$d \sin\varphi = \pm \frac{k'}{N}\lambda$$
$$(k' = 1, 2, \ldots, N-1, N+1, \ldots, 2N-1, 2N+1, \ldots). \tag{5.45}$$

В формуле (5.45) k' принимает все целочисленные значения, кроме 0, N, $2N$, ..., т. е. кроме тех, при которых условие (5.45) переходит в (5.42).

Условие (5.45) легко получить методом графического сложения колебаний. Колебания от отдельных щелей изображаются векторами одинаковой длины. Согласно (5.45)

каждый из последующих векторов повернут относительно предыдущего на один и тот же угол

$$\delta = \frac{2\pi}{\lambda} d \sin\varphi = \frac{2\pi}{N} k'.$$

Поэтому в тех случаях, когда k' не является целым кратным N, мы, пристраивая начало следующего вектора к концу предыдущего, получим замкнутую ломаную линию, которая делает k' (при $k' < N/2$) или $N-k'$ (при $k' > N/2$) оборотов, прежде чем конец N-го вектора упрется в начало 1-го. Соответственно результирующая амплитуда оказывается равной нулю. Сказанное пояснено на рис. 5.33, на

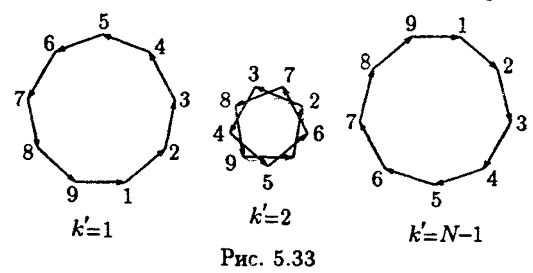


Рис. 5.33

котором показана сумма векторов для случая $N = 9$ и значений k', равных 1, 2, и $N - 1 = 8$.

Между дополнительными минимумами располагаются слабые вторичные максимумы. Число таких максимумов, приходящееся на промежуток между соседними главными

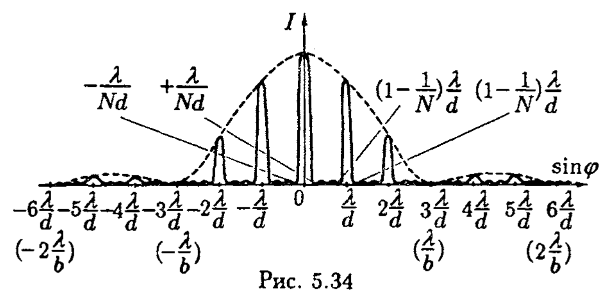


Рис. 5.34

максимумами, равно $N-2$. В § 4.6 было показано, что интенсивность вторичных максимумов не превышает 1/22 интенсивности ближайшего главного максимума.

На рис. 5.34 приведен график функции (5.40) для $N = 4$ и $d/b = 3$. Штриховая кривая, проходящая через

вершины главных максимумов, изображает интенсивность от одной щели, умноженную на N^2 (см. (5.44)). При взятом на рисунке отношении периода решетки к ширине щели ($d/b = 3$) главные максимумы 3-го, 6-го и т. д. порядков приходятся на минимумы интенсивности от одной щели, вследствие чего эти максимумы пропадают. Вообще из формул (5.41) и (5.42) вытекает, что главный максимум m-го порядка придется на k-й минимум от одной щели, если будет выполнено равенство: $m/d = k/b$, или $m/k = d/b$. Это возможно, если d/b равно отношению двух целых чисел r и s (практический интерес представляет случай, когда эти числа невелики). Тогда главный максимум r-го порядка наложится на s-й минимум и т. д., в результате чего максимумы порядков r, $2r$, $3r$ и т. д. будут отсутствовать.

Количество наблюдающихся главных максимумов определяется отношением периода решетки d к длине волны λ. Модуль $\sin\varphi$ не может превысить единицы. Поэтому из формулы (5.42) вытекает, что

$$m \leq d/\lambda. \tag{5.46}$$

Определим угловую ширину центрального (нулевого) максимума. Положение ближайших к нему дополнительных минимумов определяется условием $d\sin\varphi = \pm\lambda/N$ (см. формулу (5.45)). Следовательно, этим минимумам соответствуют значения φ, равные $\pm\arcsin(\lambda/Nd)$. Отсюда для угловой ширины центрального максимума получается выражение

$$\delta\varphi_0 = 2\arcsin\frac{\lambda}{Nd} \approx \frac{2\lambda}{Nd} \tag{5.47}$$

(мы воспользовались тем, что $\lambda/(Nd) \ll 1$).

Положение дополнительных минимумов, ближайших к главному максимуму m-го порядка, определяется условием $d\sin\varphi = (m\pm 1/N)\lambda$. Отсюда получается для угловой ширины m-го максимума следующее выражение:

$$\delta\varphi_m = \arcsin\left(m+\frac{1}{N}\right)\frac{\lambda}{d} - \arcsin\left(m-\frac{1}{N}\right)\frac{\lambda}{d}.$$

Введя обозначения $m\lambda/d = x$ и $\lambda/(Nd) = \Delta x$, можно представить эту формулу в виде

$$\delta\varphi_m = \arcsin(x+\Delta x) - \arcsin(x-\Delta x). \tag{5.48}$$

При большом числе щелей значение $\Delta x = \lambda/(Nd)$ будет очень мало. Поэтому можно положить $\arcsin(x \pm \Delta x) \approx \approx \arcsin x \pm (\arcsin x)'\Delta x$. Подстановка этих значений в формулу (5.48) приводит к приближенному выражению

$$\delta\varphi_m \approx 2(\arcsin x)'\Delta x = \frac{2\Delta x}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{1}{\sqrt{1-m^2(\lambda/d)^2}}\frac{2\lambda}{Nd}. \tag{5.49}$$

При $m = 0$ это выражение переходит в (5.47).

Произведение Nd дает длину дифракционной решетки. Следовательно, угловая ширина главных максимумов обратно пропорциональна длине решетки. С увеличением порядка максимума m ширина $\delta\varphi_m$ возрастает.

Положение главных максимумов зависит от длины волны λ. Поэтому при пропускании через решетку белого света все максимумы, кроме центрального, разложатся в спектр, фиолетовый конец которого обращен к центру дифракционной картины, красный — наружу. Таким образом, дифракционная решетка представляет собой спектральный прибор. Заметим, что в то время как стеклянная призма сильнее всего отклоняет фиолетовые лучи, дифракционная решетка, напротив, сильнее отклоняет красные лучи.

На рис. 5.35 изображены схематически спектры разных порядков, даваемые решеткой при пропускании через

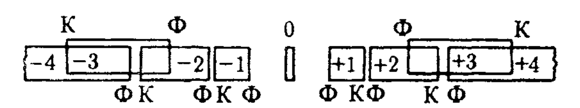


Рис. 5.35

нее белого света. В центре лежит узкий максимум нулевого порядка; у него окрашены только края (согласно (5.47) $\delta\varphi_0$ зависит от λ). По обе стороны от центрального максимума расположены два спектра 1-го порядка, затем два спектра 2-го порядка и т. д. Положения красного конца спектра m-го порядка и фиолетового конца спектра $(m+1)$-го порядка определяются соотношениями

$$\sin\varphi_{\text{кр}} = m\frac{0,76}{d}, \qquad \sin\varphi_{\text{фиол}} = (m+1)\frac{0,40}{d},$$

где d взято в микрометрах. При условии, что

$$0,76m > 0,40(m+1),$$

спектры m-го и $(m+1)$-го порядков частично перекрываются. Из неравенства получается, что $m > 10/9$. Следовательно, частичное перекрывание начинается со спектров 2-го и 3-го порядков (см. рис. 5.35, на котором для наглядности спектры разных порядков смещены относительно друг друга по вертикали).

Основными характеристиками всякого спектрального прибора являются его дисперсия и разрешающая сила. Дисперсия определяет угловое или линейное расстояние между двумя спектральными линиями, различающимися по длине волны на единицу (например, на 1 Å). Разрешающая сила определяет минимальную разность длин волн $\delta\lambda$, при которой две линии воспринимаются в спектре раздельно.

Угловой дисперсией называется величина

$$D = \frac{\delta\varphi}{\delta\lambda}, \tag{5.50}$$

где $\delta\varphi$ — угловое расстояние между спектральными линиями, различающимися по длине волны на $\delta\lambda$.

Чтобы найти угловую дисперсию дифракционной решетки, продифференцируем условие (5.42) главного максимума слева по φ, а справа по λ. Опуская знак минус, получим

$$d\cos\varphi\,\delta\varphi = m\,\delta\lambda.$$

Отсюда

$$D = \frac{\delta\varphi}{\delta\lambda} = \frac{m}{d\cos\varphi}. \tag{5.51}$$

В пределах небольших углов $\cos\varphi \approx 1$, поэтому можно положить

$$D \approx m/d. \tag{5.52}$$

Из полученного выражения следует, что угловая дисперсия обратно пропорциональна периоду решетки d. Чем выше порядок спектра m, тем больше дисперсия.

Линейной дисперсией называют величину

$$D_{\text{лин}} = \frac{\delta l}{\delta\lambda}, \tag{5.53}$$

где δl — линейное расстояние на экране или на фотопластинке между спектральными линиями, различающимися по длине волны на $\delta\lambda$. Из рис. 5.36 видно, что при

небольших значениях угла φ можно положить $\delta l \approx f'\,\delta\varphi$, где f' — фокусное расстояние линзы, собирающей дифрагирующие лучи на экране. Следовательно, линейная дисперсия связана с угловой дисперсией D соотношением

$$D_{\text{лин}} = f'D.$$

Приняв во внимание выражение (5.52), получим для линейной дисперсии дифракционной решетки (при небольших φ) следующую формулу:

$$D_{\text{лин}} = f'\frac{m}{d}. \tag{5.54}$$

Разрешающей силой спектрального прибора называют безразмерную величину

$$R = \frac{\lambda}{\delta\lambda}, \tag{5.55}$$

где $\delta\lambda$ — минимальная разность длин волн двух спектральных линий, при которой эти линии воспринимаются раздельно.

Возможность разрешения (т. е. раздельного восприятия) двух близких спектральных линий зависит не только

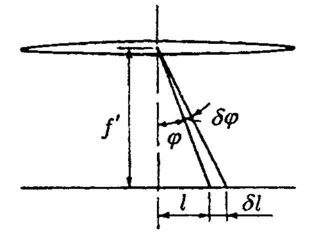


Рис. 5.36

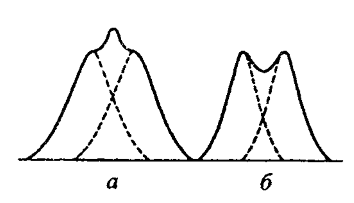


Рис. 5.37

от расстояния между ними (которое определяется дисперсией прибора), но также и от ширины спектрального максимума. На рис. 5.37 показана результирующая интенсивность (сплошные кривые), наблюдающаяся при наложении двух близких максимумов (штриховые кривые). В случае рис. 5.37*а* оба максимума воспринимаются как один. В случае рис. 5.37*б* между максимумами лежит минимум. Два близких максимума воспринимаются глазом раздельно в том случае, если интенсивность в промежутке между ними составляет не более 80% от интенсивности максимума. Согласно критерию, предложенному

Рэлеем [9]), такое соотношение интенсивностей имеет место в том случае, если середина одного максимума совпадает с краем другого (рис. 5.37*б*). Такое взаимное расположение максимумов получается при определенном (для данного прибора) значении $\delta\lambda$.

Найдем разрешающую силу дифракционной решетки. Положение середины m-го максимума для длины волны $\lambda + \delta\lambda$ определяется условием

$$d \sin \varphi_{\max} = m(\lambda + \delta\lambda).$$

Края m-го максимума для длины волны λ расположены под углами, удовлетворяющими соотношению

$$d \sin \varphi_{\min} = (m \pm 1/N)\lambda.$$

Середина максимума для длины волны $\lambda + \delta\lambda$ совпадет с краем максимума для длины волны λ в том случае, если

$$m(\lambda + \delta\lambda) = (m + 1/N)\lambda.$$

Отсюда

$$m\,\delta\lambda = \lambda/N.$$

Решив это соотношение относительно $\lambda/\delta\lambda$, получим выражение для разрешающей силы

$$R = mN. \qquad (5.56)$$

Таким образом, разрешающая сила дифракционной решетки пропорциональна порядку спектра m и числу щелей N.

На рис. 5.38 сопоставлены дифракционные картины, получающиеся для двух спектральных линий с помощью решеток, различающихся значениями дисперсии D и разрешающей силы R. Решетки I и II обладают одинаковой разрешающей силой (у них одинаковое число щелей N), но различной дисперсией (у решетки I период d в два раза больше, соответственно дисперсия D в два раза меньше, чем у решетки II). Решетки II и III имеют одинаковую дисперсию (у них одинаковые d), но разную разрешающую силу (у решетки II число щелей N и разрешающая сила R в два раза больше, чем у решетки III).

---

[9]) Барон Рэлей (до получения титула Джон Уильям Стретт) (1842–1919) — английский физик.

Дифракционные решетки бывают прозрачные и отражающие. Прозрачные решетки изготавливаются из стеклянных или кварцевых пластинок, на поверхность которых с помощью специальной машины наносится алмазным резцом ряд параллельных штрихов. Промежутки между штрихами служат щелями.

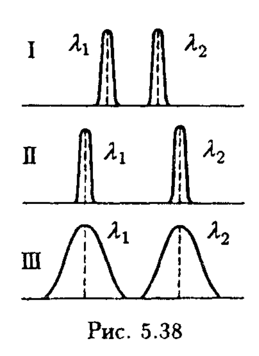


Рис. 5.38

Отражательные решетки наносятся алмазным резцом на поверхность металлического зеркала. Свет падает на отражательную решетку наклонно. При этом решетка с периодом d действует так, как при нормальном падении света действовала бы прозрачная решетка с периодом $d\cos\vartheta$, где ϑ — угол падения. Это позволяет наблюдать спектр при отражении света, например, от грампластинки, имеющей всего несколько штрихов (канавок) на 1 мм, если расположить ее так, чтобы угол падения был близок к $\pi/2$. Роуланд[10]) изобрел вогнутую отражательную решетку, которая сама (без линзы) фокусирует дифракционные спектры.

Лучшие решетки имеют до 1200 штрихов на 1 мм ($d \approx \approx 0,8$ мкм). Из формулы (5.46) следует, что спектры второго порядка в видимом свете при таком периоде не наблюдаются. Общее число штрихов у подобных решеток достигает 200 000 (длина около 200 мм). При фокусном расстоянии прибора $f' = 2$ м длина видимого спектра 1-го порядка составляет в этом случае более 700 мм.

5.7. Дифракция рентгеновских лучей

Поставим две дифракционные решетки одну за другой так, чтобы их штрихи были взаимно перпендикулярными. Первая решетка (штрихи которой, скажем, вертикальны) даст в горизонтальном направлении ряд максимумов, положения которых определяются условием

$$d_1 \sin\varphi_1 = \pm m_1 \lambda \quad (m_1 = 0, 1, 2, \ldots). \tag{5.57}$$

Вторая решетка (с горизонтальными штрихами) разобьет каждый из образовавшихся таким образом пучков на рас-

[10]) Генри Роуланд (1848–1901) — американский физик.

положенные по вертикали максимумы, положения которых определяются условием

$$d_2 \sin \varphi_2 = \pm m_2 \lambda \quad (m_2 = 0, 1, 2, \ldots). \tag{5.58}$$

В итоге дифракционная картина будет иметь вид правильно расположенных пятен, каждому из которых соответствуют два целочисленных индекса m_1 и m_2 (рис. 5.39).

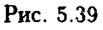


Рис. 5.39

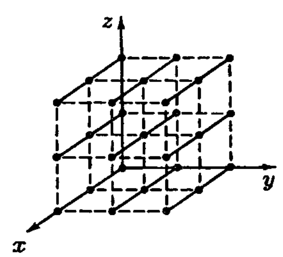


Рис. 5.40

Такая же дифракционная картина получается, если вместо двух раздельных решеток взять одну прозрачную пластинку с нанесенными на нее двумя системами взаимно перпендикулярных штрихов. Подобная пластинка представляет собой **двумерную периодическую структуру** (обычная решетка — одномерную структуру). Измерив углы φ_1 и φ_2, определяющие положения максимумов, и зная длину волны λ, можно найти по формулам (5.57) и (5.58) периоды структуры d_1 и d_2. Если направления, в которых структура периодична (например, направления, перпендикулярные к штрихам решеток), образуют угол α, отличный от $\pi/2$, дифракционные максимумы расположатся не в вершинах прямоугольников (как на рис. 5.39), а в вершинах параллелограммов. В этом случае по дифракционной картине можно определить не только периоды d_1 и d_2, но и угол α.

Дифракционную картину, аналогичную изображенной на рис. 5.39, дают любые двумерные периодические структуры, например система небольших отверстий или система непрозрачных маленьких шариков.

Для возникновения дифракционных максимумов необходимо, чтобы период структуры d был больше λ. В противном случае условия (5.57) и (5.58) могут быть удовлетворены только при значениях m_1 и m_2, равных нулю (модуль $\sin \varphi$ не может превышать единицу).

Дифракция наблюдается также на трехмерных структурах, т. е. пространственных образованиях, обнаруживающих периодичность по трем не лежащим в одной плоскости направлениям. Подобными структурами являются все кристаллические тела. Однако их период ($\sim 10^{-10}$ м) слишком мал для того, чтобы можно было наблюдать дифракцию в видимом свете. В случае кристаллов условие $d > > \lambda$ выполняется только для рентгеновских лучей. Впервые дифракция рентгеновских лучей от кристаллов наблюдалась в 1913 г. в опыте Лауэ, Фридриха и Книппинга (Лауэ принадлежит идея, остальным авторам — практическое осуществление опыта)[11].

Найдем условия образования дифракционных максимумов от трехмерной структуры. Проведем в направлениях, по которым свойства структуры обнаруживают периодичность, координатные оси x, y и z (рис. 5.40). Структуру можно представить как совокупность равноотстоящих параллельных линейных цепочек из структурных элементов, расположенных вдоль одной из координатных осей. Рассмотрим действие отдельной линейной цепочки, параллельной, например, оси x (рис. 5.41). Пусть на нее падает пучок параллельных лучей, образующих с осью x угол α_0. Каждый структурный элемент является источником вторичных волн. К соседним источникам падающая волна приходит с разностью фаз $\delta_0 = 2\pi\Delta_0/\lambda$, где $\Delta_0 = d_1 \cos\alpha_0$ (d_1 — период структуры вдоль оси x). Кроме того, между вторичными волнами, распространяющимися в направлениях, образующих с осью x угол α (все такие направления лежат вдоль образующих конуса, осью которого служит ось x), возникает дополнительная разность хода $\Delta = d_1 \cos\alpha$. Колебания от различных структурных элементов будут взаимно усиливаться для тех направлений, для которых

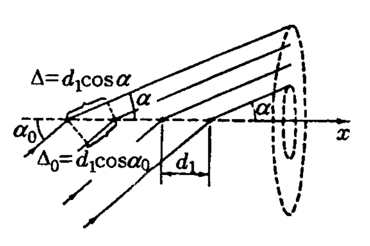


Рис. 5.41

$$d_1(\cos\alpha - \cos\alpha_0) = \pm m_1\lambda \quad (m_1 = 0, 1, 2, \ldots). \qquad (5.59)$$

[11]) Макс фон Лауэ (1879–1960) — немецкий физик; Вальтер Фридрих (1883–1968) — немецкий физик; Пауль Книплинг (1883–1935) — немецкий физик.

Каждому значению m_1 соответствует свой конус направлений, вдоль которых получаются максимумы интенсивности от одной отдельно взятой цепочки, параллельной оси x. Ось этого конуса совпадает с осью x.

Условие максимума для цепочки, параллельной оси y, имеет вид

$$d_2(\cos\beta - \cos\beta_0) = \pm m_2\lambda \quad (m_2 = 0, 1, 2, \ldots), \tag{5.60}$$

где d_2 — период структуры в направлении оси y, β_0 — угол между падающим пучком и осью y, β — угол, образуемый с осью y направлениями, вдоль которых получаются дифракционные максимумы. Каждому значению m_2 соответствует конус направлений, ось которого совпадает с осью y.

В направлениях, удовлетворяющих одновременно условиям (5.59) и (5.60), происходит взаимное усиление колебаний от источников, лежащих в одной и той же плоскости, перпендикулярной к оси z (эти источники образуют двумерную структуру). Направления возникающих максимумов интенсивности лежат вдоль линий пересечения конусов направлений, один из которых определяется условием (5.59), второй — условием (5.60).

Наконец, для цепочки, параллельной оси z, направления максимумов определяются условием

$$d_3(\cos\gamma - \cos\gamma_0) = \pm m_3\lambda \quad (m_3 = 0, 1, 2, \ldots), \tag{5.61}$$

где d_3 — период структуры в направлении оси z, γ_0 — угол между падающим пучком и осью z, γ — угол, образуемый с осью z направлениями, вдоль которых получаются дифракционные максимумы. Как и в предыдущих случаях, каждому значению m_3 соответствует конус направлений, осью которого является ось z.

В направлениях, удовлетворяющих одновременно условиям (5.59)–(5.61), происходит взаимное усиление колебаний от всех элементов, образующих пространственную структуру. В результате возникают дифракционные максимумы от пространственной структуры. Направления этих максимумов лежат на линиях пересечения трех конусов, оси которых параллельны координатным осям.

Найденные нами условия

$$\begin{aligned} d_1(\cos\alpha - \cos\alpha_0) &= \pm m_1\lambda, \\ d_2(\cos\beta - \cos\beta_0) &= \pm m_2\lambda, \quad (m_i = 0, 1, 2, \ldots) \\ d_3(\cos\gamma - \cos\gamma_0) &= \pm m_3\lambda \end{aligned} \tag{5.62}$$

носят название формул Лауэ. Каждому определяемому этими формулами направлению (α, β, γ) соответствуют три целочисленных индекса m_1, m_2 и m_3. Наибольшее значение модуля разности косинусов равно 2. Поэтому условия (5.62) могут быть выполнены при отличных от нуля значениях индексов m лишь в том случае, если λ не превышает $2d$.

Углы α, β и γ не являются независимыми. Например, в случае прямоугольной системы координат они связаны соотношением

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1. \qquad (5.63)$$

Таким образом, при заданных α_0, β_0, γ_0 и λ углы α, β, γ, определяющие направления максимумов, могут быть найдены путем решения системы из четырех уравнений. Если число уравнений превышает число неизвестных, система уравнений оказывается разрешимой только при выполнении определенных условий (только при соблюдении этих условий три конуса могут пересечься друг с другом по одной линии).

Система уравнений (5.62) и (5.63) оказывается разрешимой лишь для некоторых, вполне определенных длин волн (λ можно рассматривать как четвертое неизвестное, значения которого, получающиеся из решения системы, и дают те длины волн, для которых наблюдаются максимумы). Каждому такому значению λ соответствует, вообще говоря, только один максимум. Однако может получиться и несколько симметрично расположенных максимумов.

Если длина волны является фиксированной (монохроматическое излучение), систему уравнений можно сделать совместной, варьируя значения α_0, β_0 и γ_0, т. е. поворачивая пространственную структуру относительно направления падающего пучка.

Мы не касались вопроса о том, каким образом лучи, идущие от различных структурных элементов, сводятся в одну точку экрана. В случае видимого света это достигается с помощью линзы. Для рентгеновских лучей осуществить линзу нельзя, так как показатель преломления этих лучей во всех веществах практически равен единице. Поэтому интерференция вторичных волн достигается путем использования весьма узких пучков лучей, которые и без линзы дают на экране (или фотопластинке) пятна очень малых размеров.

Вульф[12]) и Брэгги[13]) показали независимо друг от друга, что расчет дифракционной картины от кристаллической решетки можно осуществить следующим простым способом. Проведем через узлы кристаллической решетки параллельные равноотстоящие плоскости (рис. 5.42), которые мы будем называть атомными слоями. Если падающая на кристалл волна плоская, огибающая вторичных волн, порождаемых атомами, лежащими в таком слое, также будет представлять собой плоскость. Таким образом, суммарное действие атомов, лежащих в одном слое, можно представить в виде плоской волны, отразившейся от усеянной атомами поверхности по обычному закону отражения.

Плоские вторичные волны, отразившиеся от разных атомных слоев, когерентны и будут интерферировать между собой подобно волнам, посылаемым в данном направлении различными щелями дифракционной решетки. При этом, как и в случае решетки, вторичные волны будут практически погашать друг друга во всех направлениях, кроме тех, для которых разность хода между соседними волнами является кратной λ. Из рис. 5.42 видно, что разность хода двух волн, отразившихся от соседних атомных

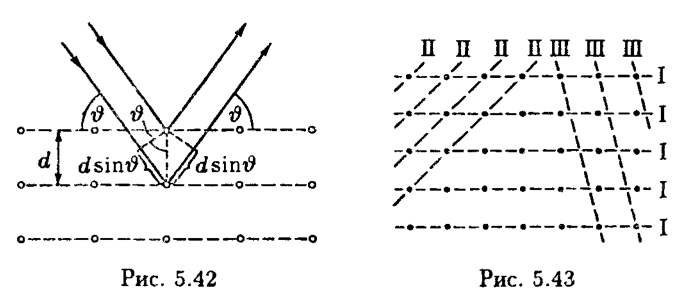


Рис. 5.42 Рис. 5.43

слоев, равна $2d\sin\vartheta$, где d — период идентичности кристалла в направлении, перпендикулярном к рассматриваемым слоям, ϑ — угол, дополнительный к углу падения и называемый углом скольжения падающих лучей. Следовательно, направления, в которых получаются дифракционные максимумы, определяются условием

$$2d\sin\vartheta = \pm m\lambda \quad (m = 1, 2, \ldots). \tag{5.64}$$

[12]) Георгий (Юрий) Викторович Вульф (1863–1925) — советский кристаллограф.

[13]) Уильям Генри Брэгг (1862–1942) — английский физик; Уильям Лоренс Брэгг (1890–1971) — английский физик, сын У. Г. Брэгга.

Это соотношение называется *формулой Брэгга–Вульфа*.

Атомные слои в кристалле можно провести множеством способов (рис. 5.43). Каждая система слоев может дать дифракционный максимум, если для нее окажется выполненным условие (5.64). Однако заметную интенсивность имеют лишь те максимумы, которые получаются за счет отражений от слоев, достаточно густо усеянных атомами (например, от слоев I и II на рис. 5.43).

Заметим, что расчет по формуле Брэгга–Вульфа и расчет по формулам Лауэ (см. (5.62)) приводят к совпадающим результатам.

Дифракция рентгеновских лучей от кристаллов находит два основных применения. Она используется для исследования спектрального состава рентгеновского излучения (*рентгеновская спектроскопия*) и для изучения структуры кристаллов (*рентгеноструктурный анализ*).

Определяя направления максимумов, получающихся при дифракции исследуемого рентгеновского излучения от кристаллов с известной структурой, можно вычислить длины волн. Первоначально для определения длин волн были использованы кристаллы кубической системы, причем межплоскостные расстояния определялись из плотности и относительной молекулярной массы кристалла.

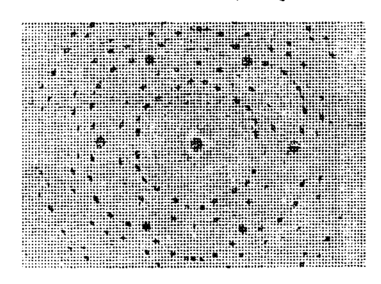


Рис. 5.44

В методе структурного анализа, предложенном Лауэ, пучок рентгеновского излучения направляется на неподвижный монокристалл. Для каждой системы слоев, достаточно густо усеянных атомами, находится в излучении длина волны, при которой выполняется условие (5.64). Поэтому на помещенной за кристаллом фотопластинке получается (после проявления) совокупность черных пятнышек. Взаимное расположение пятнышек отражает симметрию кристалла. По расстояниям между пятнышками и по их интенсивности удается найти размещение атомов в кристалле и расстояния между ними. На рис. 5.44 приведена лауэграмма берилла (минерала из группы силикатов).

В методе структурного анализа, разработанном Дебаем и Шерером[14]), используются монохроматическое рентгеновское излучение и поликристаллические образцы. Исследуемое вещество измельчается в порошок, из которого

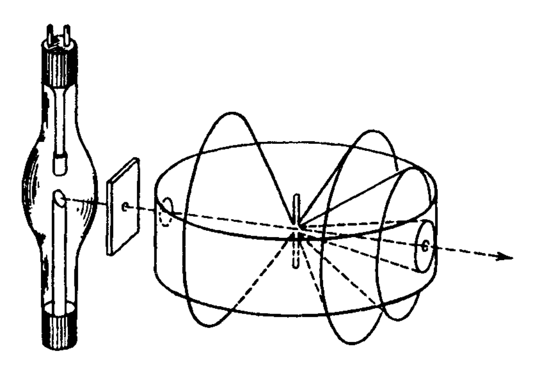


Рис. 5.45

прессуется образец в виде проволочки. Образец устанавливается по оси цилиндрической камеры, на боковую поверхность которой укладывается фотопленка (рис. 5.45). В огромном количестве беспорядочно ориентированных кристалликов найдется множество таких, для которых окажется выполненным условие (5.64), причем дифрагированный луч будет для разных кристалликов лежать во всевозможных плоскостях. В результате для каждой системы



Рис 5.46

атомных слоев и каждого m получится не одно направление максимума, а конус направлений, ось которого совпадает с направлением падающего пучка (см. рис. 5.45). Получающаяся на пленке картина (дебаеграмма) имеет вид, показанный на рис. 5.46. Каждая пара симметрично расположенных линий соответствует одному из дифракционных

[14]) Пауль Шерер (1890–1970) — швейцарский физик

максимумов, удовлетворяющих условию (5.64) при некотором значении m. Расшифровка рентгенограммы позволяет определить структуру кристалла.

5.8. Разрешающая сила объектива

Пусть на непрозрачный экран с вырезанным в нем круглым отверстием радиуса b падает плоская световая волна. Открываемое отверстием число зон Френеля для точки P, лежащей против центра отверстия на расстоянии l от него, можно найти по формуле (5.13), положив в ней $a = \infty$, $r_0 = b$ и $b = l$. В итоге получим

$$m = b^2/(l\lambda) \tag{5.65}$$

(ср. с (5.37)).

Так же, как и в случае щели, в зависимости от значения параметра (5.65) имеет место либо приближение геометрической оптики, либо дифракция Френеля, либо, наконец, дифракция Фраунгофера (см. (5.36)).

Дифракционную картину Фраунгофера от круглого отверстия можно наблюдать на экране, помещенном в фокальной плоскости линзы, поставленной за отверстием, направив на отверстие плоскую световую волну. Эта картина имеет вид центрального светлого пятна, окруженного чередующимися темными и светлыми кольцами (рис. 5.47). Соответствующий расчет дает, что первый минимум отстоит от центра дифракционной картины на угловое расстояние

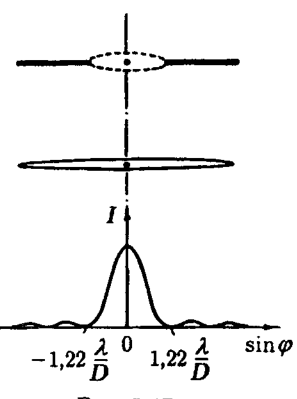


Рис. 5.47

$$\varphi_{\min} = \arcsin 1,22\frac{\lambda}{D}, \tag{5.66}$$

где D — диаметр отверстия (ср. с (5.28)). Если $D \gg \lambda$, можно считать, что

$$\varphi_{\min} = 1,22\frac{\lambda}{D}. \tag{5.67}$$

Подавляющая часть (около 84%) светового потока, проходящего через отверстие, попадает в область центрального светлого пятна. Интенсивность первого светлого

кольца составляет всего 1,74%, а второго — 0,41% интенсивности центрального пятна. Интенсивность остальных светлых колец еще меньше. Поэтому в первом приближении дифракционную картину можно считать состоящей из одного лишь светлого пятна с угловым радиусом, определяемым формулой (5.66). Это пятно является по существу изображением бесконечно удаленного точечного источника света (на отверстие падает плоская световая волна).

Дифракционная картина не зависит от расстояния между отверстием и линзой. В частности, она будет такой же и в случае, когда края отверстия совмещены с краями линзы. Отсюда вытекает, что самая совершенная линза не может дать идеального оптического изображения. Вследствие волновой природы света изображение точки, даваемое линзой, имеет вид пятнышка, представляющего собой центральный максимум дифракционной картины. Угловой размер этого пятнышка уменьшается с ростом диаметра оправы линзы D.

При очень малом угловом расстоянии между двумя точками их изображения, получающиеся с помощью какого-либо оптического прибора, наложатся друг на друга и дадут одно светящееся пятно. Следовательно, две очень близкие точки не будут восприниматься прибором раздельно, или, как говорят, не будут разрешаться прибором. Поэтому, как бы ни было велико по размерам изображение, на нем не будут видны соответствующие детали.

Обозначим через $\delta\psi$ наименьшее угловое расстояние между двумя точками, при котором они еще разрешаются оптическим прибором. Величина, обратная $\delta\psi$, называется **разрешающей силой прибора**:

$$R = \frac{1}{\delta\psi}. \qquad (5.68)$$

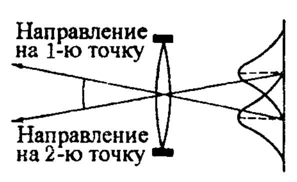


Рис. 5.48

Найдем разрешающую силу объектива зрительной трубы или фотоаппарата для случая, когда рассматриваются или фотографируются очень удаленные предметы. При этом условии лучи, идущие в объектив от каждой точки предмета, можно считать параллельными и пользоваться формулой (5.66). Согласно критерию Рэлея две близкие точки будут еще разрешены, если середина центрального дифракционного максимума для одной точки совпадает с краем центрального максимума (т. е. с первым минимумом) для

второй точки. Из рис. 5.48 видно, что это произойдет, если угловое расстояние между точками $\delta\psi$ окажется равным угловому радиусу (5.66). Диаметр оправы объектива D много больше длины волны λ. Поэтому можно считать, что

$$\delta\psi = 1,22\frac{\lambda}{D}.$$

Отсюда

$$R = \frac{D}{1,22\lambda}. \tag{5.69}$$

Из этой формулы следует, что разрешающая сила объектива тем больше, чем больше его диаметр.

Диаметр зрачка глаза при нормальном освещении равен приблизительно 2 мм. Подставив это значение в формулу (5.69) и взяв $\lambda = 0,5 \cdot 10^{-3}$ мм, получим

$$\delta\psi = 1,22\frac{0,5 \cdot 10^{-3}}{2}\,\text{рад} = 0,305 \cdot 10^{-3}\,\text{рад} \approx 1'.$$

Таким образом, минимальное угловое расстояние между точками, при котором глаз воспринимает их еще раздельно, равно одной угловой минуте. Любопытно, что расстояние между соседними светочувствительными элементами сетчатки глаза соответствует этому угловому расстоянию.

5.9. Голография

Голография (т. е. «полная запись», от греческих слов: голос — весь, графо — пишу) есть особый способ фиксирования на фотопластинке структуры световой волны, отраженной предметом. При освещении этой пластинки (голограммы) пучком света зафиксированная на ней волна восстанавливается в почти первоначальном виде, так что при восприятии восстановленной волны глазом зрительное ощущение бывает практически таким, каким оно было бы при наблюдении самого предмета.

Голография была изобретена в 1947 г. Габором[15]). Однако полное осуществление идеи Габора стало возможным только после появления в 1960 г. источников света

[15]) Деннис Габор (1900–1979) — физик. По национальности венгр, с 1927 г. в Германии, с 1934 г. в Великобритании, с 1967 г. в США.

высокой степени когерентности — лазеров. Исходная схема Габора была усовершенствована американскими физиками Э. Лейтом и Ю. Упатниексом, которые получили в 1963 г. первые лазерные голограммы. Денисюк[16]) предложил в 1962 г. оригинальный метод фиксирования голограмм на толстослойной эмульсии. Этот метод, в отличие от голограмм на тонкослойной эмульсии, дает цветное изображение предмета.

Мы ограничимся элементарным рассмотрением метода получения голограмм на тонкослойной эмульсии. На

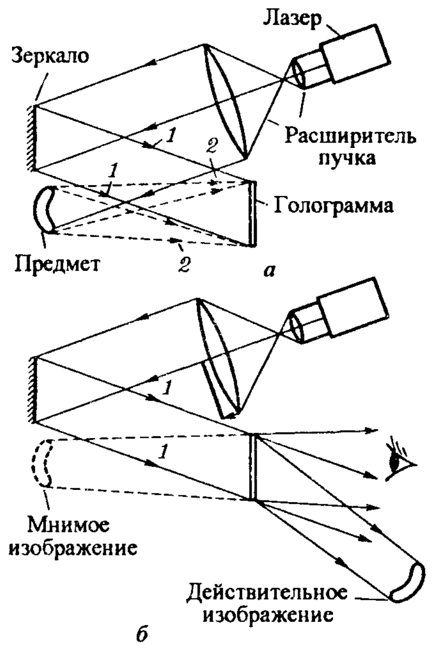


Рис. 5.49

рис. 5.49*а* дана схема установки для получения голограмм, а на рис. 5.49*б* — схема восстановления изображения. Испускаемый лазером световой пучок, расширенный с помощью системы линз, делится на две части. Одна часть отражается зеркалом к фотопластинке, образуя так называемый опорный пучок *1*. Вторая часть попадает на пла-

[16]) Юрий Николаевич Денисюк (р. в 1927 г.) — советский физик.

стинку, отразившись от фотографируемого предмета; она образует предметный пучок 2. Оба пучка должны быть когерентными. Это требование выполняется, поскольку лазерное излучение обладает высокой степенью пространственной когерентности (световые колебания когерентны по всему поперечному сечению лазерного пучка). Опорный и предметный пучки, налагаясь друг на друга, образуют интерференционную картину, которая фиксируется фотопластинкой. Экспонированная таким способом и проявленная фотопластинка и есть голограмма. В образовании голограммы участвуют два пучка света, в связи с чем описанная схема получения голограмм называется двухлучевой.

Для восстановления изображения проявленную фотопластинку располагают относительно источника света так, как она находилась при фотографировании, и освещают опорным пучком света (часть лазерного пучка, которая освещала при фотографировании предмет, теперь перекрывается). Опорный пучок дифрагирует на голограмме, в результате чего возникает волна, имеющая точно такую же структуру, как волна, отражавшаяся предметом. Эта волна дает мнимое изображение предмета, которое воспринимается глазом наблюдателя. Наряду с волной, образующей мнимое изображение, возникает еще одна волна, которая дает действительное изображение предмета. Действительное изображение псевдоскопично; это означает, что оно имеет рельеф, обратный рельефу предмета, — выпуклые места заменены вогнутыми и наоборот.

Рассмотрим характер голограммы и процесс восстановления изображения. Пусть на фотопластинку падают два когерентных параллельных пучка световых лучей, идущих под углом ψ друг к другу (рис. 5.50). Пучок *1* является опорным, пучок *2* — предметным (предмет в данном случае представляет собой бесконечно удаленную точку). Для простоты предположим, что пучок *1* падает на пластинку нормально. Все полученные ниже результаты остаются справедливыми и при наклонном падении опорного пучка, однако формулы в этом случае более громоздки.

Вследствие интерференции опорного и предметного пучков на пластинке образуется система чередующихся прямолинейных максимумов и минимумов интенсивности. Пусть точки A и B соответствуют серединам соседних интерференционных максимумов. Тогда разность хода Δ' равна λ. Из рис. 5.50 видно, что $\Delta' = d\sin\psi$; следова-

тельно,

$$d\sin\psi = \lambda. \qquad (5.70)$$

Зафиксировав на пластинке (путем экспонирования и проявления) интерференционную картину, направим на

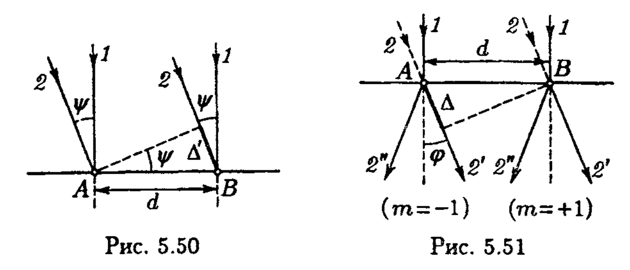


Рис. 5.50 Рис. 5.51

нее опорный пучок *1*. Пластинка для этого пучка играет роль дифракционной решетки, период d которой определяется формулой (5.70). Отличительной особенностью этой решетки является то обстоятельство, что ее пропускная способность изменяться в направлении, перпендикулярном к «штрихам», по косинусоидальному закону (у рассматривавшихся в § 5.6 решеток она изменялась скачком: просвет — темно — просвет — темно и т. д.). Эта особенность приводит к тому, что интенсивность всех дифракционных максимумов порядка выше 1-го практически равна нулю.

При освещении пластинки опорным пучком (рис. 5.51) возникает дифракционная картина, максимумы которой образуют с нормалью к пластинке углы φ, определяемые условием

$$d\sin\varphi = m\lambda \quad (m = 0, \pm 1) \qquad (5.71)$$

(ср. с формулой (5.42)). Максимум, отвечающий $m = 0$, лежит на продолжении опорного пучка. Максимум, отвечающий $m = +1$, имеет такое же направление, какое имел при экспонировании предметный пучок *2* (ср. формулы (5.70) и (5.71)). Кроме того, возникает максимум, отвечающий $m = -1$.

Можно показать, что полученный нами результат справедлив и в том случае, когда предметный пучок *2* является не параллельным, а расходящимся. При этом максимум, отвечающий $m = +1$, имеет характер расходящегося пучка лучей *2'* (он дает мнимое изображение точки, из которой выходили лучи *2* при экспонировании); максимум

же, отвечающий $m = -1$, имеет характер сходящегося пучка лучей $2''$ (он образует действительное изображение точки, из которой выходили лучи *2* при экспонировании).

При получении голограммы пластинка освещается опорным пучком *1* и множеством расходящихся пучков *2*, отраженных разными точками предмета. На пластинке возникает сложная интерференционная картина, образуемая в результате наложения картин, даваемых каждым из пучков *2* в отдельности. При освещении голограммы опорным пучком *1* оказываются восстановленными все пучки *2*, т. е. полная световая волна, отражавшаяся предметом (ей отвечает $m = +1$). Кроме нее, возникают еще две волны (отвечающие $m = 0$ и $m = -1$). Но эти волны распространяются в других направлениях и не мешают восприятию волны, дающей мнимое изображение предмета (см. рис. 5.49).

Изображение предмета, даваемое голограммой, является объемным. На него можно смотреть из разных положений. Если при съемке близкие предметы закрывали бы удаленные, то, сместившись в сторону, можно заглянуть за ближайший предмет (вернее, за его изображение) и увидеть скрытые до того предметы. Это объясняется тем, что, сместившись в сторону, мы воспринимаем изображение, восстановленное от периферической части голограммы, на которую при экспонировании падали также и лучи, отраженные от скрытых предметов. Рассматривая изображения ближних и дальних предметов, приходится, как и при рассматривании самих предметов, по разному аккомодировать глаз.

Если голограмму расколоть на несколько кусков, то каждый из них при просвечивании дает такую же картину, что и исходная голограмма. Однако чем меньшая часть голограммы используется для восстановления изображения, тем меньше его четкость. Это легко понять, приняв во внимание, что при уменьшении числа штрихов дифракционной решетки ее разрешающая сила уменьшается (см. формулу (5.56)).

Возможные применения голографии весьма разнообразны. Далеко не полный их перечень образуют голографическое кино и телевидение, голографический микроскоп, контроль качества обработки изделий. В литературе можно встретить утверждение, что изобретение голографии можно сравнить по его последствиям с созданием радиосвязи.

Глава 6

Поляризация света

6.1. Естественный и поляризованный свет

Напомним, что поляризованным называется свет, в котором направления колебаний светового вектора упорядочены каким-либо образом (см. § 3.1). В естественном свете колебания различных направлений быстро и беспорядочно сменяют друг друга.

Рассмотрим два взаимно перпендикулярных электрических колебания, совершающихся вдоль осей x и y и различающихся по фазе на δ:

$$E_x = A_1 \cos\omega t, \qquad E_y = A_2 \cos(\omega t + \delta). \tag{6.1}$$

Результирующая напряженность $\mathbf{E}$ является векторной суммой напряженностей $\mathbf{E}_x$ и $\mathbf{E}_y$ (рис. 6.1). Угол φ между направлениями векторов $\mathbf{E}$ и $\mathbf{E}_x$ определяется выражением

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{E_y}{E_x} = \frac{A_2 \cos(\omega t + \delta)}{A_1 \cos\omega t}. \tag{6.2}$$

Если разность фаз δ претерпевает случайные хаотические изменения, то и угол φ, т. е. направление светового вектора $\mathbf{E}$, будет испытывать скачкообразные неупорядоченные изменения. В соответствии с этим естественный свет можно представить как наложение двух некогерентных электромагнитных волн, поляризованных во взаимно перпендикулярных плоскостях и имеющих одинаковую интенсивность. Такое представление намного упрощает рассмотрение прохождения естественного света через поляризационные устройства.

Допустим, что световые волны E_x и E_y когерентны, причем δ равно нулю или π. Тогда согласно (6.2)

$$\operatorname{tg}\varphi = \pm\frac{A_2}{A_1} = \text{const}.$$

Следовательно, результирующее колебание совершается в фиксированном направлении — волна оказывается плоскополяризованной.

В случае, когда $A_1 = A_2$ и $\delta = \pm\pi/2$,

$$\operatorname{tg}\varphi = \mp \operatorname{tg}\omega t$$

($\cos(\omega t \pm \pi/2) = \mp \sin\omega t$). Отсюда вытекает, что плоскость колебаний поворачивается вокруг направления луча с угловой скоростью, равной частоте колебания ω. Свет в этом случае будет поляризованным по кругу.

Чтобы выяснить характер результирующего колебания в случае произвольного постоянного значения δ, примем

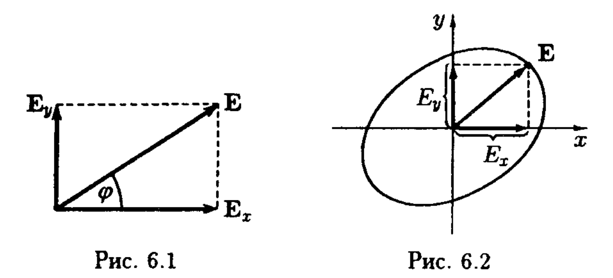


Рис. 6.1 Рис. 6.2

во внимание, что величины (6.1) представляют собой координаты конца результирующего вектора **E** (рис. 6.2). Из учения о колебаниях (см. § 7.3 кн. 1) известно, что два взаимно перпендикулярных гармонических колебания одинаковой частоты при сложении дают в общем случае движение по эллипсу (в частности, может получиться движение по прямой или по окружности). Аналогично точка с координатами, определяемыми выражениями (6.1), т. е. конец вектора **E**, движется по эллипсу. Следовательно, две когерентные плоскополяризованные световые волны, плоскости колебаний которых взаимно перпендикулярны, при наложении друг на друга дают эллиптически поляризованную световую волну. При разности фаз δ, равной нулю или π, эллипс вырождается в прямую и получается плоскополяризованный свет. При $\delta = \pm\pi/2$ и равенстве амплитуд складываемых волн эллипс превращается в окружность — получается свет, поляризованный по кругу.

В зависимости от направления вращения вектора **E** различают правую и левую эллиптическую и круговую поляризацию. Если по отношению к направлению, противоположному направлению луча, вектор **E** вращается по часовой стрелке, поляризация называется *правой*, в противном случае — *левой*.

Плоскость, в которой колеблется световой вектор в плоскополяризованной волне, мы будем называть *плос-*

костью колебаний. По историческим причинам плоскостью поляризации была названа не плоскость, в которой колеблется вектор **E**, а перпендикулярная к ней плоскость.

Плоскополяризованный свет можно получить из естественного с помощью приборов, называемых поляризаторами. Эти приборы свободно пропускают колебания, параллельные плоскости, которую мы будем называть плоскостью поляризатора, и полностью или частично задерживают колебания, перпендикулярные к его плоскости. Поляризатор, задерживающий перпендикулярные к его плоскости колебания только частично, мы будем называть несовершенным. Просто поляризатором мы будем для краткости называть идеальный поляризатор, полностью задерживающий колебания, перпендикулярные к его плоскости, и не ослабляющий колебаний, параллельных плоскости.

На выходе из несовершенного поляризатора получается свет, в котором колебания одного направления преобладают над колебаниями других направлений. Такой свет называется частично поляризованным. Его можно рассматривать как смесь естественного и плоскополяризованного света. Частично поляризованный свет, как и естественный, можно представить в виде наложения двух некогерентных плоскополяризованных волн с взаимно перпендикулярными плоскостями колебаний. Отличие заключается в том, что в случае естественного света интенсивность этих волн одинакова, а в случае частично поляризованного — разная.

Если пропустить частично поляризованный свет через поляризатор, то при вращении прибора вокруг направления луча интенсивность прошедшего света будет изменяться в пределах от I_{max} до I_{min}, причем переход от одного из этих значений к другому будет совершаться при повороте на угол, равный $\pi/2$ (за один полный поворот два раза будет достигаться максимальное и два раза минимальное значения интенсивности). Выражение

$$P = \frac{I_{max} - I_{min}}{I_{max} + I_{min}} \qquad (6.3)$$

называется степенью поляризации. Для плоскополяризованного света $I_{min} = 0$ и $P = 1$; для естественного света $I_{max} = I_{min}$ и $P = 0$. К эллиптически поляризованному свету понятие степени поляризации не применимо (у такого света колебания полностью упорядочены).

Колебание амплитуды A, совершающееся в плоскости, образующей с плоскостью поляризатора угол φ, можно разложить на два колебания с амплитудами $A_{\parallel} = A\cos\varphi$ и $A_{\perp} = A\sin\varphi$ (рис. 6.3; луч перпендикулярен к плоскости рисунка). Первое колебание пройдет через прибор, второе будет задержано. Интенсивность прошедшей волны пропорциональна $A_{\parallel}^2 = A^2\cos^2\varphi$, т. е. равна $I\cos^2\varphi$, где I — интенсивность колебания с амплитудой A. Следовательно, колебание, параллельное плоскости поляризатора, несет с собой долю интенсивности, равную $\cos^2\varphi$. В естественном свете все значения φ равновероятны. Поэтому доля света, прошедшего через поляризатор, будет равна сред-

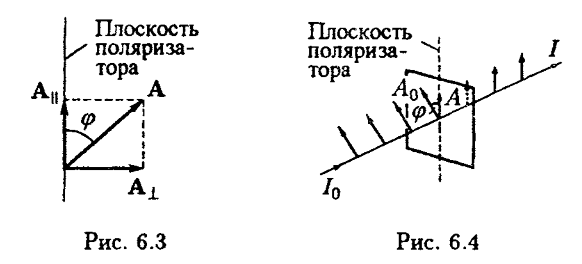


Рис. 6.3 Рис. 6.4

нему значению $\cos^2\varphi$, т. е. 1/2. При вращении поляризатора вокруг направления естественного луча интенсивность прошедшего света остается одной и той же, изменяется лишь ориентация плоскости колебаний света, выходящего из прибора.

Пусть на поляризатор падает плоскополяризованный свет амплитуды A_0 и интенсивности I_0 (рис. 6.4). Сквозь прибор пройдет составляющая колебания с амплитудой $A = A_0\cos\varphi$, где φ — угол между плоскостью колебаний падающего света и плоскостью поляризатора. Следовательно, интенсивность прошедшего света I определяется выражением

$$I = I_0\cos^2\varphi. \tag{6.4}$$

Соотношение (6.4) носит название закона Малюса[1]).

Поставим на пути естественного луча два поляризатора, плоскости которых образуют угол φ. Из первого поляризатора выйдет плоскополяризованный свет, интенсивность которого I_0 составит половину интенсивности

[1]) Этьенн Луи Малюс (1775–1812) — французский физик.

естественного света $I_{\text{ест}}$. Согласно закону Малюса из второго поляризатора выйдет свет интенсивности $I_0 \cos^2 \varphi$. Таким образом, интенсивность света, прошедшего через два поляризатора, равна

$$I = \frac{1}{2} I_{\text{ест}} \cos^2 \varphi. \tag{6.5}$$

Максимальная интенсивность, равная $I_{\text{ест}}/2$, получается при $\varphi = 0$ (поляризаторы параллельны). При $\varphi = \pi/2$ интенсивность равна нулю — скрещенные поляризаторы света не пропускают.

Пусть эллиптически поляризованный свет падает на поляризатор. Прибор пропускает составляющую $\mathbf{E}_{||}$ вектора $\mathbf{E}$ по направлению плоскости поляризатора (рис. 6.5). Максимальное значение этой составляющей достигается в точках *1* и *2*. Следовательно, амплитуда вышедшего из прибора плоскополяризованного света равна длине отрезка $O1'$. Вращая поляризатор вокруг направления луча, мы будем наблюдать изменения интенсивности в пределах от $I_{\max}$ (получающейся при совпадении плоскости поляризатора с большой полуосью эллипса) до $I_{\min}$ (получающейся при совпадении плоскости поляризатора с малой полуосью эллипса). Такой же характер изменения интенсивности света при вращении поляризатора получается в случае частично поляризованного света. В случае света, поляризованного по кругу, вращение поляризатора не сопровождается (как и в случае естественного света) изменением интенсивности света, прошедшего через прибор.

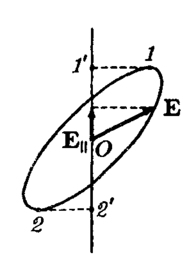


Рис. 6.5

6.2. Поляризация при отражении и преломлении

Если угол падения света на границу раздела двух диэлектриков (например, на поверхность стеклянной пластинки) отличен от нуля, отраженный и преломленный лучи оказываются частично поляризованными[2]. В отраженном луче преобладают колебания, перпендикулярные к

[2]) При отражении от проводящей поверхности (например, от поверхности металла) получается эллиптически поляризованный свет.

плоскости падения (на рис. 6.6 эти колебания обозначены точками), в преломленном луче — колебания, параллельные плоскости падения (на рисунке они изображены двусторонними стрелками). Степень поляризации зависит от угла падения.

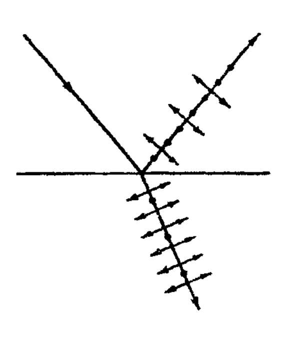


Рис. 6.6

Обозначим через $\vartheta_{\text{Бр}}$ угол, удовлетворяющий условию

$$\operatorname{tg}\vartheta_{\text{Бр}} = n_{12} \tag{6.6}$$

(n_{12} — показатель преломления второй среды относительно первой). При угле падения ϑ_1, равном $\vartheta_{\text{Бр}}$, отраженный луч полностью поляризован (он содержит только колебания, перпендикулярные к плоскости падения). Степень поляризации преломленного луча при угле падения, равном $\vartheta_{\text{Бр}}$, достигает наибольшего значения, однако этот луч остается поляризованным только частично.

Соотношение (6.6) носит название закона Брюстера[3]), а угол $\vartheta_{\text{Бр}}$ называют углом Брюстера. Легко убедиться в том, что при падении света под углом Брюстера отраженный и преломленный лучи взаимно перпендикулярны.

Степень поляризации отраженного и преломленного лучей при различных углах падения можно получить с помощью формул Френеля. Эти формулы вытекают из условий, налагаемых на электромагнитное поле на границе двух диэлектриков[4]). К числу таких условий принадлежит равенство тангенциальных составляющих векторов **E** и **H**, а также равенство нормальных составляющих векторов **D** и **B** по обе стороны границы раздела (с одной стороны нужно брать сумму соответствующих векторов для падающей и отраженной волн, с другой — вектор для преломленной волны).

Формулы Френеля устанавливают соотношения между комплексными амплитудами падающей, отраженной и преломленной волн. Напомним, что комплексной ампли-

---

[3]) Дейвид Брюстер (1781–1868) — шотландский физик.

[4]) Френель получил эти формулы на основе представлений о свете как об упругих волнах, распространяющихся в эфире.

тудой $\hat{A}$ называется выражение $A\exp(i\alpha)$, где A — обычная амплитуда, а α — начальная фаза колебания. Следовательно, равенство двух комплексных амплитуд означает равенство как обычных амплитуд, так и начальных фаз обоих колебаний:

$$\hat{A}_1 = \hat{A}_2 \Rightarrow A_1 = A_2, \quad \alpha_1 = \alpha_2. \tag{6.7}$$

В случае, когда комплексные амплитуды различаются знаком, обычные амплитуды одинаковы, а начальные фазы различаются на π ($\exp(i\pi) = -1$):

$$\hat{A}_1 = -\hat{A}_2 \Rightarrow A_1 = A_2, \quad \alpha_1 = \alpha_2 + \pi. \tag{6.8}$$

Представим падающую волну в виде наложения двух некогерентных волн, в одной из которых колебания совершаются в плоскости падения, а в другой перпендикулярно к этой плоскости Комплексную амплитуду первой волны обозначим через $\hat{A}_{\|}$, второй — через $\hat{A}_{\perp}$. Аналогично поступим с отраженной и преломленной волнами, причем амплитуды отраженных волн будем обозначать теми же символами с добавлением одного штриха, амплитуды преломленных волн — теми же символами с добавлением двух штрихов. Таким образом,

$\hat{A}_{\|}$ и $\hat{A}_{\perp}$ — амплитуды падающих волн,
$\hat{A}'_{\|}$ и $\hat{A}'_{\perp}$ — амплитуды отраженных волн,
$\hat{A}''_{\|}$ и $\hat{A}''_{\perp}$ — амплитуды преломленных волн.

Формулы Френеля имеют следующий вид[5]):

$$\begin{gathered}
\hat{A}'_{\|} = \hat{A}_{\|}\frac{\operatorname{tg}(\vartheta_1 - \vartheta_2)}{\operatorname{tg}(\vartheta_1 + \vartheta_2)}, \\
\hat{A}'_{\perp} = -\hat{A}_{\perp}\frac{\sin(\vartheta_1 - \vartheta_2)}{\sin(\vartheta_1 + \vartheta_2)}, \\
\hat{A}''_{\|} = \hat{A}_{\|}\frac{2\sin\vartheta_2\cos\vartheta_1}{\sin(\vartheta_1 + \vartheta_2)\cos(\vartheta_1 - \vartheta_2)}, \\
\hat{A}''_{\perp} = \hat{A}_{\perp}\frac{2\sin\vartheta_2\cos\vartheta_1}{\sin(\vartheta_1 + \vartheta_2)}
\end{gathered} \tag{6.9}$$

[5]) Обычно формулы Френеля пишут без «шляпок» над амплитудами. Однако чтобы подчеркнуть, что речь идет о комплексных амплитудах мы сочли полезным написать амплитуды со «шляпками».

(ϑ_1 — угол падения, ϑ_2 — угол преломления световой волны). Подчеркнем, что формулы (6.9) устанавливают соотношения между комплексными амплитудами на границе раздела диэлектриков, т. е. в точке падения луча на эту границу.

Из третьей и четвертой формул (6.9) следует, что знаки комплексных амплитуд падающей и преломленной волн при любых значениях углов ϑ_1 и ϑ_2 одинаковы (ϑ_1 и ϑ_2 в сумме не могут превзойти π). Это означает, что при проникновении во вторую среду фаза волны не претерпевает скачка.

При рассмотрении фазовых соотношений между падающей и отраженной волнами следует учесть, что для волны, поляризованной перпендикулярно к плоскости падения, отсутствию скачка фазы при отражении соответствует совпадение знаков $\hat{A}_\perp$ и $\hat{A}'_\perp$ (рис. 6.7*а*). Для волны же, поляризованной в плоскости падения, скачок фазы отсутствует в том случае, когда знаки $\hat{A}_\parallel$ и $\hat{A}'_\parallel$ противоположны (рис. 6.7*б*).

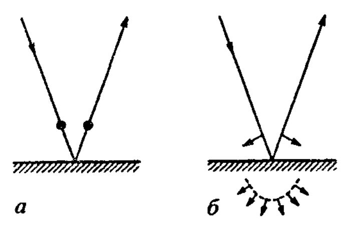


Рис. 6.7

Фазовые соотношения между отраженной и падающей волнами зависят от соотношения между показателями преломления n_1 и n_2 первой и второй сред, а также от соотношения между углом падения ϑ_1 и углом Брюстера $\vartheta_{\text{Бр}}$ (напомним, что при $\vartheta_1 = \vartheta_{\text{Бр}}$ сумма углов ϑ_1 и ϑ_2 равна $\pi/2$). В табл. 6.1 приведены результаты, вытекающие из первой и второй формул (6.9) в четырех возможных случаях. Из таблицы следует, что в случае падения под углом, меньшим угла Брюстера, отражение от оптически более плотной среды сопровождается скачком фазы на π; отражение от оптически менее плотной среды происходит без изменения фазы. Этот результат для $\vartheta_1 = 0$ был получен в § 3.3. В случае, когда $\vartheta_1 > \vartheta_{\text{Бр}}$, фазовые соотношения для обеих компонент волны оказываются различными.

Из первой формулы (6.9) получается, что при $\vartheta_1 + \vartheta_2 = \pi/2$, т. е. при $\vartheta_1 = \vartheta_{\text{Бр}}$, амплитуда $\hat{A}'_\parallel$ обращается в нуль. Следовательно, в отраженной волне присутствуют лишь колебания, перпендикулярные к плоскости паде-

ния, — отраженная волна полностью поляризована. Таким образом, закон Брюстера непосредственно вытекает из формул Френеля.

Таблица 6.1

	$\vartheta_1 < \vartheta_{\text{Бр}}$ $(\vartheta_1 + \vartheta_2 < \pi/2)$	$\vartheta_1 < \vartheta_{\text{Бр}}$ $(\vartheta_1 + \vartheta_2 > \pi/2)$
$n_1 > n_2$, $\vartheta_1 > \vartheta_2$	Знаки $\hat{A}'_{\parallel}$ и $\hat{A}_{\parallel}$ одинаковы (скачок фазы на π) Знак $\hat{A}'_{\perp}$ противоположен знаку $\hat{A}_{\perp}$ (скачок фазы на π)	Знак $\hat{A}'_{\parallel}$ противоположен знаку $\hat{A}_{\parallel}$ (скачка фазы нет) Знак $\hat{A}'_{\perp}$ противоположен знаку $\hat{A}_{\perp}$ (скачок фазы на π)
$n_1 > n_2$, $\vartheta_1 > \vartheta_2$	Знак $\hat{A}'_{\parallel}$ противоположен знаку $\hat{A}_{\parallel}$ (скачка фазы нет) Знаки $\hat{A}'_{\perp}$ и $\hat{A}_{\perp}$ одинаковы (скачка фазы нет)	Знаки $\hat{A}'_{\parallel}$ и $\hat{A}_{\parallel}$ одинаковы (скачок фазы на π) Знаки $\hat{A}'_{\perp}$ и $\hat{A}_{\perp}$ одинаковы (скачка фазы нет)

При малых углах падения синусы и тангенсы в формулах (6.9) можно заменить самими углами, а косинусы положить равными единице. Кроме того, в этом случае можно считать, что $\vartheta_1 = n_{12}\vartheta_2$ (это вытекает из закона преломления после замены синусов углами). В результате формулы Френеля для малых углов падения принимают вид

$$\begin{aligned}
\hat{A}'_{\parallel} &= \hat{A}_{\parallel}\frac{\vartheta_1 - \vartheta_2}{\vartheta_1 + \vartheta_2} = \hat{A}_{\parallel}\frac{n_{12} - 1}{n_{12} + 1}, \\
\hat{A}'_{\perp} &= -\hat{A}_{\perp}\frac{\vartheta_1 - \vartheta_2}{\vartheta_1 + \vartheta_2} = -\hat{A}_{\perp}\frac{n_{12} - 1}{n_{12} + 1}, \\
\hat{A}''_{\parallel} &= \hat{A}_{\parallel}\frac{2\vartheta_2}{\vartheta_1 + \vartheta_2} = \hat{A}_{\parallel}\frac{2}{n_{12} + 1}, \\
\hat{A}''_{\perp} &= \hat{A}_{\perp}\frac{2\vartheta_2}{\vartheta_1 + \vartheta_2} = \hat{A}_{\perp}\frac{2}{n_{12} + 1}.
\end{aligned} \tag{6.10}$$

Возведя уравнения (6.10) в квадрат и умножив получившиеся выражения на показатель преломления соответствующей среды, получим соотношения между интен-

сивностями падающего, отраженного и преломленного лучей для случая малых углов падения (см. формулу (3.9)). При этом, например, интенсивность отраженного света I' можно вычислить как сумму интенсивностей обеих составляющих $I'_{\parallel}$ и $I'_{\perp}$. В итоге получается

$$I' = I\left(\frac{n_{12}-1}{n_{12}+1}\right)^2, \quad I'' = n_{12}I\left(\frac{2}{n_{12}+1}\right)^2.$$

Из этих формул вытекают выражения (3.35) и (3.36) для ρ и τ.

6.3. Поляризация при двойном лучепреломлении

При прохождении света через все прозрачные кристаллы, за исключением принадлежащих к кубической системе, наблюдается явление, заключающееся в том, что упавший на кристалл луч разделяется внутри кристалла на два луча, распространяющихся, вообще говоря, с разными скоростями и в различных направлениях. Это явление, получившее название двойного лучепреломления, впервые наблюдалось в 1669 г. Бартолином[6]) для исландского шпата (разновидность углекислого кальция $CaCO_3$ — кристаллы гексагональной системы).

Кристаллы, обладающие двойным лучепреломлением, подразделяются на одноосные и двуосные. У одноосных кристаллов один из преломленных лучей подчиняется обычному закону преломления; в частности, он лежит в одной плоскости с падающим лучом и нормалью к преломляющей поверхности. Этот луч называется обыкновенным и обозначается буквой o. Для другого луча, называемого необыкновенным (его обозначают буквой e), отношение синусов угла падения и угла преломления не остается постоянным при изменении угла падения. Даже при нормальном падении света на кристалл необыкновенный луч, вообще говоря, отклоняется от нормали (рис 6.8). Кроме того, необыкновенный луч не лежит, как правило, в одной плоскости с падающим лучом и нормалью к преломляющей поверхности.

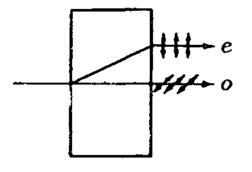


Рис. 6.8

[6]) Эразм Бартолин (1625–1698) — датский физик и математик.

Примерами одноосных кристаллов могут служить исландский шпат, кварц и турмалин. У двуосных кристаллов (слюда, гипс) оба луча необыкновенные — показатели преломления для них зависят от направления в кристалле. В дальнейшем мы ограничимся рассмотрением только одноосных кристаллов.

У одноосных кристаллов имеется направление, вдоль которого обыкновенный и необыкновенный лучи распространяются не разделяясь и с одинаковой скоростью[7]). Это направление называется оптической осью кристалла. Следует иметь в виду, что оптическая ось — это не прямая линия, проходящая через какую-то точку кристалла, а определенное направление в кристалле. Любая прямая, параллельная данному направлению, является оптической осью кристалла.

Любая плоскость, проходящая через оптическую ось, называется главным сечением или главной плоскостью кристалла. Обычно пользуются главным сечением, проходящим через световой луч.

Исследование обыкновенного и необыкновенного лучей показывает, что оба луча полностью поляризованы во взаимно перпендикулярных направлениях (см. рис. 6.8). Плоскость колебаний обыкновенного луча перпендикулярна к главному сечению кристалла. В необыкновенном луче колебания светового вектора совершаются в плоскости, совпадающей с главным сечением. По выходе из кристалла оба луча отличаются друг от друга только направлением поляризации, так что названия «обыкновенный» и «необыкновенный» луч имеют смысл только внутри кристалла.

В некоторых кристаллах один из лучей поглощается сильнее другого. Это явление называется дихроизмом. Очень сильным дихроизмом в видимых лучах обладает кристалл турмалина (минерала сложного состава). В нем обыкновенный луч практически полностью поглощается на длине 1 мм. В кристаллах сульфата йодистого хинина один из лучей поглощается на пути примерно 0,1 мм. Это обстоятельство использовано для изготовления поляризационного устройства, называемого поляроидом. Оно представляет собой целлулоидную пленку, в которую введено большое количество одинаково ориентированных кристалликов сульфата йодистого хинина.

---

[7]) У двуосных кристаллов имеется два таких направления.

Двойное лучепреломление объясняется анизотропией кристаллов. В кристаллах некубической системы диэлектрическая проницаемость ε оказывается зависящей от направления. В одноосных кристаллах ε в направлении оптической оси и в направлениях, перпендикулярных к ней имеет различные значения $\varepsilon_{\parallel}$ и $\varepsilon_{\perp}$. В других направлениях ε имеет промежуточные значения. Согласно формуле (3.3) $n = \sqrt{\varepsilon}$. Следовательно, из анизотропии ε вытекает, что электромагнитным волнам с различными направлениями колебаний вектора $\mathbf{E}$ соответствуют разные значения показателя преломления n. Поэтому скорость световых волн зависит от направления колебаний светового вектора $\mathbf{E}$.

В обыкновенном луче колебания светового вектора происходят в направлении, перпендикулярном к главному сечению кристалла (на рис. 6.9 эти колебания изображены точками на соответствующем луче). Поэтому при любом направлении обыкновенного луча (на рисунке указаны три направления: *1*, *2* и *3*) вектор $\mathbf{E}$ образует с оптической осью кристалла прямой угол, и скорость световой волны будет одна и та же, равная $v_o = c/\sqrt{\varepsilon_{\perp}}$. Изображая скорость обыкновенного луча в виде отрезков, отложенных по разным направлениям, мы получим сферическую поверхность. На рис. 6.9 показано пересечение этой поверхности с плоскостью чертежа. Такая картина, как на рисунке, наблюдается в любом главном сечении, т. е. в любой плоскости, проходящей через оптическую ось. Представим себе, что в точке O внутри кристалла помещается точечный источник света. Тогда построенная нами сфера будет волновой поверхностью обыкновенных лучей.

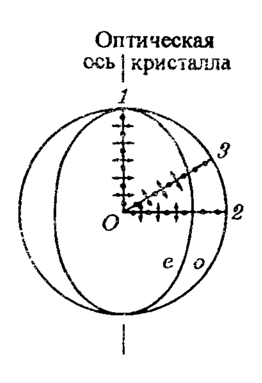


Рис. 6.9

Колебания в необыкновенном луче совершаются в главном сечении. Поэтому для разных лучей направления колебаний вектора $\mathbf{E}$ (на рис. 6.9 эти направления изображены двустронними стрелками) образуют с оптической осью разные углы α. Для луча *1* угол α равен $\pi/2$, вследствие чего скорость имеет значение $v_o = c/\sqrt{\varepsilon_{\perp}}$, для луча *2* угол $\alpha = 0$ и скорость равна $v_e = c/\sqrt{\varepsilon_{\parallel}}$. Для луча *3*

скорость имеет промежуточное значение. Можно доказать, что волновая поверхность необыкновенных лучей представляет собой эллипсоид вращения. В местах пересечения с оптической осью кристалла этот эллипсоид и сфера, построенная для обыкновенных лучей, соприкасаются.

Одноосные кристаллы характеризуют показателем преломления обыкновенного луча, равным $n_o = c/v_o$, и показателем преломления необыкновенного луча, перпендикулярного к оптической оси, равным $n_e = c/v_e$. Последнюю величину называют просто показателем преломления необыкновенного луча.

В зависимости от того, какая из скоростей, v_o или v_e, больше, различают положительные и отрицательные одноосные кристаллы (рис. 6.10). У положительных кристаллов $v_e < v_o$ (это означает, что $n_e < n_o$). У отрицательных кристаллов $v_e > v_o$ $(n_e > n_o)$. Легко запомнить, какие кристаллы называются положительными, а какие отрицательными. У положительных кристаллов эллипсоид скоростей вытянут вдоль оптической оси, ассоциируясь с вертикальным штрихом в знаке «+»; у отрицательных кристаллов эллипсоид скоростей растянут в направлении, перпендикулярном к оптической оси, ассоциируясь со знаком «−».

Ход обыкновенного и необыкновенного лучей в кристалле можно определить с помощью принципа Гюйгенса.

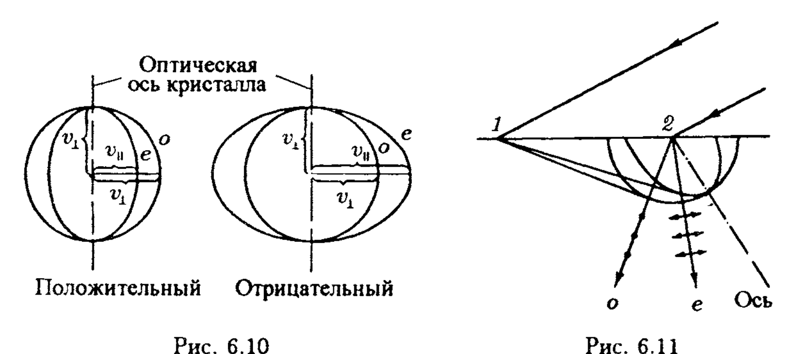


Рис. 6.10 Рис. 6.11

На рис. 6.11 построены волновые поверхности обыкновенного и необыкновенного лучей с центром в точке *2*, лежащей на поверхности кристалла. Построение выполнено для момента времени, когда волновой фронт падающей волны достигает точки *1*. Огибающие всех вторичных

волн (волны, центры которых лежат в промежутке между точками *1* и *2*, на рисунке не показаны) для обыкновенного и необыкновенного лучей, очевидно, представляют собой плоскости. Преломленный луч, *o* или *e*, выходящий из точки *2*, проходит через точку касания огибающей с соответствующей волновой поверхностью.

Напомним, что лучами называются линии, вдоль которых распространяется энергия световой волны (см. § 3.1). Из рис. 6.11 следует, что обыкновенный луч

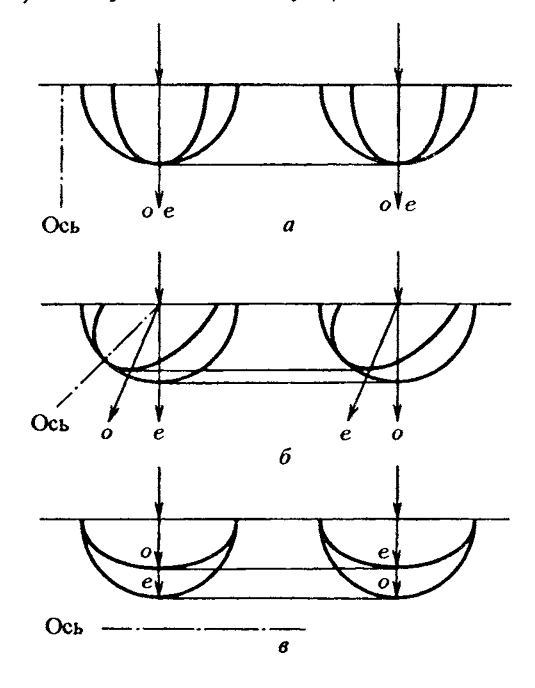


Рис. 6.12

o совпадает с нормалью к соответствующей волновой поверхности. Необыкновенный же луч *e* заметно отклоняется от нормали к волновой поверхности.

На рис. 6.12 изображены три случая нормального падения света на поверхность кристалла, различающиеся направлением оптической оси. В случае рис. 6.12*а* лучи *o* и *e* распространяются вдоль оптической оси и поэтому идут не разделяясь. Из рис. 6.12*б* видно, что даже при нормальном падении света на преломляющую поверхность необык-

новенный луч может отклониться от нормали к этой поверхности. На рис. 6.12*в* оптическая ось кристалла параллельна преломляющей поверхности. В этом случае при нормальном падении света обыкновенный и необыкновенный лучи идут по одному и тому же направлению, но распространяются с разной скоростью, вследствие чего между ними возникает все возрастающая разность фаз. Характер поляризации обыкновенного и необыкновенного лучей таков же, как для лучей, изображенных на рис. 6.11.

6.4. Интерференция поляризованных лучей

При наложении двух когерентных лучей, поляризованных во взаимно перпендикулярных направлениях, никакой интерференционной картины с характерным для нее чередованием максимумов и минимумов интенсивности получиться не может. Интерференция возникает только в том случае, если колебания во взаимодействующих лучах совершаются вдоль одного и того же направления. Колебания в двух лучах, первоначально поляризованных во взаимно перпендикулярных направлениях, можно свести в одну плоскость, пропустив эти лучи через поляризатор, установленный так, чтобы его плоскость не совпадала с плоскостью колебаний ни одного из лучей.

Рассмотрим, что получается при наложении вышедших из кристаллической пластинки обыкновенного и не-

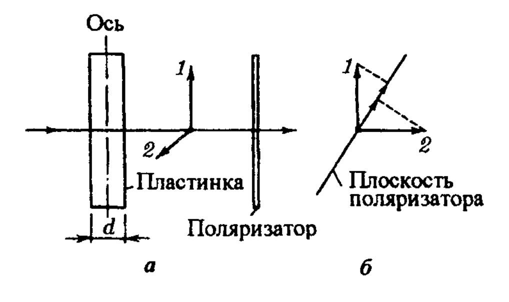


Рис. 6.13

обыкновенного лучей. Пусть пластинка вырезана параллельно оптической оси (рис. 6.13). При нормальном падении света на пластинку обыкновенный и необыкновенный лучи будут распространяться не разделяясь, но с различной скоростью (см. рис. 6.12*в*). За время прохождения

через пластинку между лучами возникнет разность хода

$$\Delta = (n_o - n_e)d \tag{6.11}$$

или разность фаз

$$\delta = \frac{(n_o - n_e)d}{\lambda_0} \cdot 2\pi \tag{6.12}$$

(d — толщина пластинки, λ_0 — длина волны в вакууме).

Таким образом, если пропустить естественный свет через вырезанную параллельно оптической оси кристаллическую пластинку (рис. 6.13*а*), из пластинки выйдут два поляризованных во взаимно перпендикулярных плоскостях луча *1* и *2* [8]), между которыми будет существовать разность фаз, определяемая формулой (6.12). Поставим на пути этих лучей поляризатор. Колебания обоих лучей после прохождения через поляризатор будут лежать в одной плоскости. Амплитуды их будут равны составляющим амплитуд лучей *1* и *2* в направлении плоскости поляризатора (рис. 6.13*б*).

Вышедшие из поляризатора лучи возникают в результате разделения света, полученного от одного источника. Поэтому они, казалось бы, должны интерферировать. Однако если лучи *1* и *2* возникают за счет прохождения через пластинку естественного света, они не дают интерференции. Это объясняется весьма просто. Хотя обыкновенный и необыкновенный лучи порождены одним и тем же источником света, они содержат в основном колебания, принадлежащие разным цугам волн, испускаемых отдельными атомами. В обыкновенном луче колебания обусловлены преимущественно цугами, плоскости колебаний которых близки к одному направлению в пространстве, в необыкновенном луче — цугами, плоскости колебаний которых близки к другому, перпендикулярному к первому направлению. Поскольку отдельные цуги некогерентны, возникающие из естественного света обыкновенный и необыкновенный лучи, а следовательно, и лучи *1* и *2*, также оказываются некогерентными.

Иначе обстоит дело, если на кристаллическую пластинку падает плоскополяризованный свет. В этом случае колебания каждого цуга разделяются между обыкновенным и необыкновенным лучами в одинаковой пропорции

---

[8]) В кристалле луч *1* был необыкновенным и мог быть обозначен буквой e, луч *2* был обыкновенный (o). По выходе из кристалла эти лучи утратили право называться обыкновенным и необыкновенным.

(зависящей от ориентации оптической оси пластинки относительно плоскости колебаний в падающем луче). Поэтому лучи o и e, а следовательно, и лучи *1* и *2*, оказываются когерентными и будут интерферировать.

6.5. Прохождение плоскополяризованного света через кристаллическую пластинку

Рассмотрим кристаллическую пластинку, вырезанную параллельно оптической оси. В предыдущем параграфе мы выяснили, что при падении на такую пластинку плоскополяризованного света обыкновенный и необыкновенный лучи оказываются когерентными. На входе в пластинку разность фаз δ этих лучей равна нулю, на выходе из пластинки

$$\delta = \frac{\Delta}{\lambda_0} \cdot 2\pi = \frac{(n_o - n_e)d}{\lambda_0} \cdot 2\pi \qquad (6.13)$$

(см. (6.11) и (6.12); мы предполагаем, что свет падает на пластинку нормально).

Вырезанная параллельно оптической оси пластинка, для которой

$$(n_o - n_e)d = m\lambda_0 + \lambda_0/4$$

(m — любое целое число либо нуль), называется пластинкой в четверть волны. При прохождении через такую пластинку обыкновенный и необыкновенный лучи приобретают разность фаз, равную $\pi/2$ (напомним, что разность фаз определяется с точностью до $2\pi m$). Пластинка, для которой

$$(n_o - n_e)d = m\lambda_0 + \lambda_0/2,$$

называется пластинкой в полволны, и т. д.

Рассмотрим прохождение плоскополяризованного света через пластинку в полволны. Колебание $\mathbf{E}$ в падающем луче, совершающееся в плоскости P, возбудит при входе в кристалл колебание $\mathbf{E}_o$ обыкновенного луча и колебание $\mathbf{E}_e$ необыкновенного луча (рис. 6.14). За время прохождения через пластинку разность фаз между колебаниями $\mathbf{E}_o$ и $\mathbf{E}_e$ изменяется на π. Поэтому на выходе из пластинки фазовое соотношение между обыкновенным и необыкновенным лучами будет соответствовать взаимному расположению векторов $\mathbf{E}_e$ и $\mathbf{E}_o'$ (на входе в пластинку оно соответствовало взаимному расположению векторов $\mathbf{E}_e$ и $\mathbf{E}_o$).

Следовательно, свет, вышедший из пластинки, будет поляризован в плоскости P'. Плоскости P и P' расположены симметрично относительно оптической оси пластинки O. Таким образом, пластинка в полволны поворачивает плоскость колебаний прошедшего через нее света на угол 2φ (φ — угол между плоскостью колебаний в падающем луче и осью пластинки).

Теперь пропустим плоскополяризованный свет через пластинку в четверть волны (рис. 6.15). Если расположить

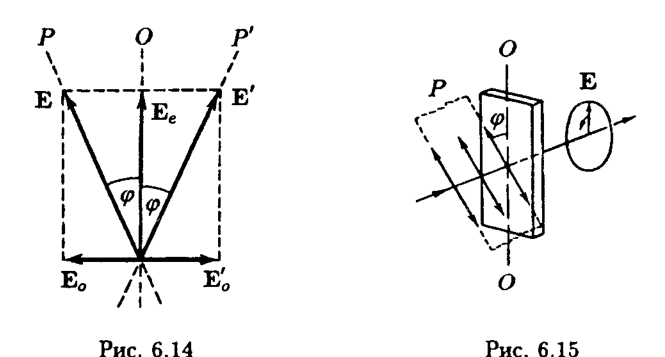


Рис. 6.14 Рис. 6.15

пластинку так, чтобы угол φ между плоскостью колебаний P в падающем луче и осью пластинки O равнялся 45°, амплитуды обоих лучей, вышедших из пластинки, будут одинаковы (предполагается, что дихроизма нет). Сдвиг по фазе между колебаниями в этих лучах составит $\pi/2$. Следовательно, свет, вышедший из пластинки, будет поляризован по кругу. При ином значении угла φ амплитуды вышедших из пластинки лучей будут неодинаковыми. Поэтому при наложении эти лучи образуют свет, поляризованный по эллипсу, одна из осей которого совпадает с осью пластинки O.

При пропускании плоскополяризованного света через пластинку в не совпадающее с $m + 1/4$ или $m + 1/2$ дробное число волн из пластинки выйдут две когерентные, поляризованные во взаимно перпендикулярных плоскостях световые волны, разность фаз которых отличается от $\pi/2$ и от π. Следовательно, при любом отношении амплитуд этих волн, зависящем от угла φ (см. рис. 6.15), на выходе из пластинки получится эллиптически поляризованный свет, причем ни одна из осей эллипса не будет совпа-

дать с осью пластинки O. Ориентация осей эллипса относительно оси O определяется разностью фаз δ, а также отношением амплитуд, т. е. углом φ между плоскостью колебаний в падающей волне и осью пластинки O.

Отметим, что, независимо от толщины пластинки, при φ, равном нулю или $\pi/2$, в пластинке будет распространяться только один луч (в первом случае необыкновенный, во втором — обыкновенный), так что на выходе из пластинки свет останется плоскополяризованным с плоскостью колебаний, совпадающей с P.

Если на пути эллиптически поляризованного света поставить пластинку в четверть волны, расположив ее оптической осью вдоль одной из осей эллипса, то пластинка внесет дополнительную разность фаз, равную $\pi/2$. В результате разность фаз двух плоскополяризованных волн, дающих в сумме эллиптически поляризованную волну, станет равной нулю или π, так что наложение этих волн даст плоскополяризованную волну. Следовательно, надлежащим образом повернутая пластинка в четверть волны превращает эллиптически поляризованный свет в плоскополяризованный. На этом основывается метод, с помощью которого можно отличить эллиптически поляризованный свет от частично поляризованного или свет, поляризованный по кругу, от естественного. Исследуемый свет пропускается через пластинку в четверть волны и помещенный за ней поляризатор. Если исследуемый луч является эллиптически поляризованным (или поляризованным по кругу), то, вращая пластинку и поляризатор вокруг направления луча, удается добиться полного затемнения поля зрения. Если же свет является частично поляризованным (или естественным), то ни при каком положении пластинки и поляризатора невозможно получить погашения исследуемого луча.

6.6. Кристаллическая пластинка между двумя поляризаторами

Поместим между поляризаторами[9]) P и P' пластинку из одноосного кристалла, вырезанную параллельно оптической оси O (рис. 6.16). Из поляризатора P выйдет плоскополяризованный свет интенсивности I. Пройдя через

[9]) Второй по ходу луча поляризатор P' называют также анализатором.

пластинку, свет станет в общем случае эллиптически поляризованным. По выходе из поляризатора P' свет снова будет плоскополяризованным. Его интенсивность I' зависит от взаимной ориентации плоскостей поляризаторов

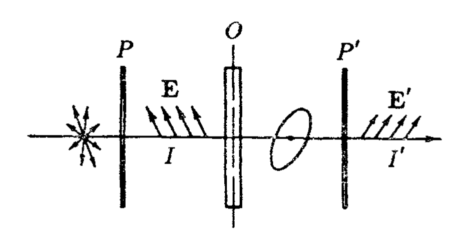


Рис. 6.16

P и P' и оптической оси пластинки, а также от разности фаз δ, приобретаемой обыкновенным и необыкновенными лучами при прохождении через пластинку.

Предположим, что угол φ между плоскостью поляризатора P и осью пластинки O равен $\pi/4$. Рассмотрим два частных случая: поляризаторы параллельны (рис. 6.17*а*) и поляризаторы скрещены (рис. 6.17*б*). Световое колебание, вышедшее из поляризатора P, изобразится вектором

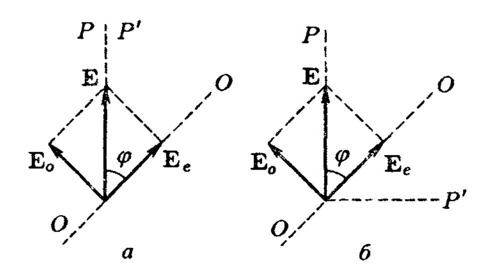


Рис. 6.17

E, лежащим в плоскости P. При входе в пластинку колебание **E** возбудит два колебания — перпендикулярное к оптической оси колебание $\mathbf{E}_o$ (обыкновенный луч) и параллельное оси колебание $\mathbf{E}_e$ (необыкновенный луч). Эти колебания будут когерентными; проходя через пластинку, они приобретут разность фаз δ, которая определяется толщиной пластинки и разностью показателей преломления

обыкновенного и необыкновенного лучей. Амплитуды этих колебаний одинаковы и равны

$$E_o = E_e = E\cos(\pi/4) = E/\sqrt{2}, \tag{6.14}$$

где E — амплитуда волны, вышедшей из первого поляризатора.

Через второй поляризатор пройдут составляющие колебаний $\mathbf{E}_o$ и $\mathbf{E}_e$ по направлению плоскости P'. Амплитуды этих составляющих в обоих случаях равны амплитудам (6.14), умноженным на $\cos(\pi/4)$, т. е.

$$E'_o = E'_e = E/2. \tag{6.15}$$

В случае параллельных поляризаторов (рис. 6.17*а*) разность фаз волн, вышедших из поляризатора P', равна δ, т. е. разности фаз, приобретенной при прохождении через пластинку. В случае скрещенных поляризаторов (рис. 6.17*б*) проекции векторов $\mathbf{E}_o$ и $\mathbf{E}_e$ на направление P' имеют разные знаки. Это означает, что в дополнение к разности фаз δ возникает дополнительная разность фаз, равная π.

Волны, вышедшие из второго поляризатора, будут интерферировать. Амплитуда $E_{\parallel}$ результирующей волны в случае параллельных поляризаторов определяется соотношением

$$E_{\parallel}^2 = E_o'^2 + E_e'^2 + 2E'_oE'_e\cos\delta,$$

а в случае скрещенных поляризаторов — соотношением

$$E_{\perp}^2 = E_o'^2 + E_e'^2 + 2E'_oE'_e\cos(\delta + \pi).$$

Приняв во внимание (6.15), можно написать, что

$$E_{\parallel}^2 = \frac{1}{4}E^2 + \frac{1}{4}E^2 + \frac{1}{2}E^2\cos\delta = \frac{1}{2}E^2(1 + \cos\delta) = E^2\cos^2\frac{\delta}{2},$$

$$E_{\perp}^2 = \frac{1}{4}E^2 + \frac{1}{4}E^2 + \frac{1}{2}E^2\cos(\delta + \pi) = \frac{1}{2}E^2(1 - \cos\delta) = E^2\sin^2\frac{\delta}{2}.$$

Интенсивность пропорциональна квадрату амплитуды. Следовательно,

$$I'_{\parallel} = I\cos^2\frac{\delta}{2}, \quad I'_{\perp} = I\sin^2\frac{\delta}{2}. \tag{6.16}$$

Здесь $I'_{\parallel}$ — интенсивность света, вышедшего из второго поляризатора в случае, когда поляризаторы параллельны, $I'_{\perp}$ — та же интенсивность в случае, когда поляризаторы скрещены, I — интенсивность света, прошедшего через первый поляризатор.

Из формул (6.16) следует, что интенсивности $I'_{\parallel}$ и $I'_{\perp}$ оказываются «дополнительными» — в сумме они дают интенсивность I. В частности, при

$$\delta = 2m\pi \quad (m = 1, 2, \ldots) \tag{6.17}$$

интенсивность $I'_{\parallel}$ будет равна I, а интенсивность $I'_{\perp}$ обращается в нуль. При значениях же

$$\delta = (2m + 1)\pi \quad (m = 0, 1, \ldots) \tag{6.18}$$

интенсивность $I'_{\parallel}$ становится равной нулю, а интенсивность $I'_{\perp}$ достигает значения I.

Разность показателей преломления $n_o - n_e$ зависит от длины волны света λ_0. Кроме того, λ_0 входит непосредственно в выражение (6.13) для δ. Пусть свет, падающий на поляризатор P, состоит из излучения двух длин волн λ_1 и λ_2, таких, что δ для λ_1 удовлетворяет условию (6.17), а для λ_2 — условию (6.18). В этом случае при параллельных поляризаторах через систему, изображенную на рис. 6.16, пройдет беспрепятственно свет с длиной волны λ_1 и полностью будет задержан свет с длиной волны λ_2. При скрещенных поляризаторах пройдет беспрепятственно свет с длиной волны λ_2 и полностью будет задержан свет с длиной волны λ_1. Следовательно, при одном расположении поляризаторов окраска прошедшего через систему света будет соответствовать длине волны λ_1, при другом расположении — длине волны λ_2. Такие две окраски называются *дополнительными*. При вращении одного из поляризаторов окраска непрерывно меняется, переходя за каждую четверть оборота от одного дополнительного цвета к другому. Смена окраски наблюдается и при φ, отличном от $\pi/4$ (но не равном нулю или $\pi/2$), только цвета оказываются менее насыщенными.

Разность фаз δ зависит от толщины пластинки. Поэтому, если двоякопреломляющая прозрачная пластинка, помещенная между поляризаторами, имеет в разных местах неодинаковую толщину, эти места при наблюдении со стороны поляризатора P' будут представляться окрашенными в различные цвета. При вращении поляризатора P' эти цвета изменяются, причем каждый из них

переходит в дополнительный цвет. Поясним это следующим примером. На рис. 6.18*а* изображена помещенная между поляризаторами пластинка, у которой нижняя половина толще верхней. Пусть свет, проходящий через пластину, содержит излучение только двух длин волн: λ_1 и λ_2. На рис. 6.18*б* дан «вид» со стороны поляризатора P'.

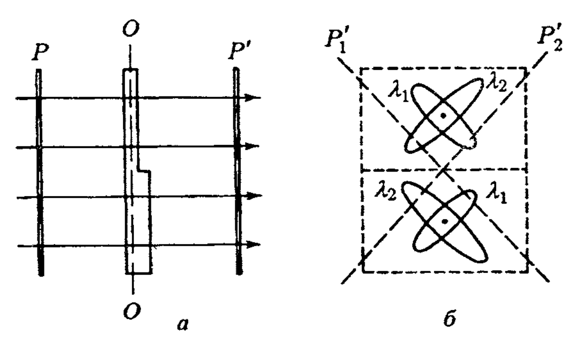


Рис. 6.18

По выходе из кристаллической пластинки каждая из составляющих излучения будет, вообще говоря, поляризована по эллипсу. Ориентация и эксцентриситет эллипсов для длин волн λ_1 и λ_2, а также для разных половин пластинки будут различны. При установке плоскости поляризатора P' в положение P_1' в излучении, прошедшем через P', будет преобладать в верхней половине пластинки длина волны λ_1, в нижней половине — λ_2. Поэтому обе половины будут иметь разную окраску. При установке поляризатора P' в положение P_2' окраска верхней половины будет определяться излучением с длиной волны λ_2, нижней половины — излучением с длиной волны λ_1. Таким образом, при повороте поляризатора P' на $90°$ обе половины пластинки как бы обмениваются окраской. Разумеется, так будет обстоять дело лишь при определенном соотношении толщин обеих частей пластинки.

6.7. Искусственное двойное лучепреломление

В прозрачных аморфных телах, а также в кристаллах кубической системы может возникать двойное лучепреломление под влиянием внешних воздействий. В частности, это происходит при механических деформациях тел.

Мерой возникающей оптической анизотропии служит разность показателей преломления обыкновенного и необыкновенного лучей. Опыт показывает, что эта разность пропорциональна напряжению σ в данной точке тела (т. е. силе, приходящейся на единицу площади; см. § 2.9 кн. 1):

$$n_0 - n_e = k\sigma \tag{6.19}$$

(k — коэффициент пропорциональности, зависящий от свойств вещества).

Поместим стеклянную пластинку Q между скрещенными поляризаторами P и P' (рис. 6.19). Пока стекло не деформировано, такая система света не пропускает. Если же пластинку подвергнуть сжатию, свет через систему начинает проходить, причем наблюдаемая в прошедших лучах картина оказывается испещренной цветными полосами. Каждая такая полоса соответствует одинаково деформированным местам пластинки. Следовательно, по расположению полос можно судить о распределении напряжений внутри пластинки. На этом основывается оптический метод исследования напряжений. Изготовленная из прозрачного изотропного материала (например, из плексигласа) модель какой-либо детали или конструкции помещается между скрещенными поляризаторами. Модель

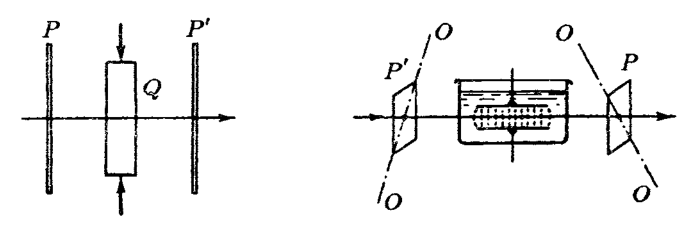


Рис. 6.19 Рис. 6.20

подвергается действию нагрузок, подобных тем, какие будет испытывать само изделие. Наблюдаемая при этом в проходящем белом свете картина позволяет определить распределение напряжений, а также судить об их величине.

Возникновение двойного лучепреломления в жидкостях и в аморфных твердых телах под воздействием электрического поля было обнаруженном Керром[10]) в 1875 г.

[10]) Джон Керр (1824–1907) — шотландский физик.

Это явление получило название эффекта Керра. В 1930 г. этот эффект был наблюден также и в газах.

Схема установки для исследования эффекта Керра в жидкостях показана на рис. 6.20. Установка состоит из ячейки Керра, помещенной между скрещенными поляризаторами P и P'. Ячейка Керра представляет собой герметический сосуд с жидкостью, в которую введены пластины конденсатора. При подаче на пластины напряжения между ними возникает практически однородное электрическое поле. Под его действием жидкость приобретает свойства одноосного кристалла с оптической осью, ориентированной вдоль поля.

Возникающая разность показателей преломления n_o и n_e пропорциональна квадрату напряженности поля E:

$$n_o - n_e = kE^2. \tag{6.20}$$

На пути l между обыкновенным и необыкновенным лучами возникает разность хода

$$\Delta = (n_o - n_e)l = klE^2$$

или разность фаз

$$\delta = \frac{\Delta}{\lambda_0} \cdot 2\pi = 2\pi \frac{k}{\lambda_0} lE^2.$$

Это выражение принято записывать в виде

$$\delta = 2\pi BlE^2, \tag{6.21}$$

где B — характерная для вещества величина, называемая постоянной Керра.

Из известных жидкостей наибольшей постоянной Керра обладает нитробензол ($C_6H_5NO_2$). Постоянная Керра зависит от температуры вещества и от длины волны света.

Эффект Керра объясняется различной поляризуемостью молекул по разным направлениям. В отсутствие поля молекулы ориентированы хаотическим образом, поэтому жидкость в целом не обнаруживает анизотропии. Под действием поля молекулы поворачиваются так, чтобы в направлении поля были ориентированы либо их дипольные электрические моменты (у полярных молекул), либо направления наибольшей поляризуемости (у неполярных молекул). В результате жидкость становится оптически анизотропной. Ориентирующему действию поля противится тепловое движение молекул. Этим обусловливается уменьшение постоянной Керра с повышением температуры.

Время, в течение которого устанавливается (при включении поля) или исчезает (при выключении поля) преимущественная ориентация молекул, составляет около 10^{-10} с. Поэтому ячейка Керра, помещенная между скрещенными поляризаторами, может служить практически безынерционным световым затвором. В отсутствие напряжения на пластинах конденсатора затвор будет закрыт. При включении напряжения затвор пропускает значительную часть света, падающего на первый поляризатор.

6.8. Вращение плоскости поляризации

Естественное вращение. Некоторые вещества, называемые оптически активными, обладают способностью вызывать вращение плоскости поляризации проходящего через них плоскополяризованного света. К числу таких веществ принадлежат кристаллические тела (например, кварц, киноварь), чистые жидкости (скипидар, никотин) и растворы оптически активных веществ в неактивных растворителях (водные растворы сахара, винной кислоты и др.).

Кристаллические вещества сильнее всего вращают плоскость поляризации в случае, когда свет распространяется вдоль оптической оси кристалла. Угол поворота φ пропорционален пути l, пройденному лучом в кристалле:

$$\varphi = \alpha l. \tag{6.22}$$

Коэффициент α называют постоянной вращения. Эта постоянная зависит от длины волны (дисперсия вращательной способности).

В растворах угол поворота плоскости поляризации пропорционален пути света в растворе l и концентрации активного вещества c:

$$\varphi = [\alpha] c l. \tag{6.23}$$

Здесь $[\alpha]$ — величина, называемая удельной постоянной вращения.

В зависимости от направления вращения плоскости поляризации оптически активные вещества подразделяются на право- и левовращающие. Направление вращения (относительно луча) не зависит от направления

луча. Поэтому, если луч, прошедший через оптически активный кристалл вдоль оптической оси, отразить зеркалом и заставить пройти через кристалл еще раз в обратном направлении, то восстанавливается первоначальное положение плоскости поляризации.

Все оптически активные вещества существуют в двух разновидностях — правовращающей и левовращающей. Существуют право- и левовращающий кварц, право- и левовращающий сахар и т. д. Молекулы или кристаллы одной разновидности являются зеркальным отражением молекул или кристаллов другой разновидности (рис. 6.21). Буквами C, X, Y, Z и T обозначены отличающиеся друг от друга атомы или группировки атомов (радикалы). Молекула *б* является зеркальным отражением молекулы *а*. Если смотреть на тетраэдр, изображенный на рис. 6.21, вдоль направления CX, то при обходе по часовой стрелке будет иметь место чередование $ZYTZ$ для молекулы *а* и $ZTYZ$ для молекулы *б*. То же самое наблюдается для любого из направлений CY, CZ и CT. Чередование радикалов X, Y, Z, T в молекуле *б* противоположно их чередованию в молекуле *а*. Поэтому если, например, вещество, образованное молекулами *а*, правовращающее, то вещество, образованное молекулами *б*, будет левовращающим.

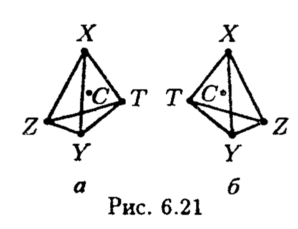


Рис. 6.21

Если между двумя скрещенными поляризаторами поместить оптически активное вещество (кристалл кварца, прозрачную кювету с раствором сахара и т. п.), то поле зрение просветляется. Чтобы снова получить темноту, нужно повернуть один из поляризаторов на угол φ, определяемый выражением (6.22) или (6.23). В случае раствора, зная удельную постоянную вращения $[\alpha]$ данного вещества и длину l, можно, измерив угол поворота φ, определить по формуле (6.23) концентрацию раствора c. Такой способ определения концентрации применяется в производстве различных веществ, в частности в сахароварении (соответствующий прибор называется сахарометром).

Магнитное вращение плоскости поляризации. Оптически неактивные вещества приобретают способность вращать плоскость поляризации под действием магнитного поля. Это явление было обнаружено Фарадеем и поэтому

называется иногда эффектом Фарадея. Оно наблюдается только при распространении света вдоль направления намагниченности. Поэтому для наблюдения эффекта Фарадея в полюсных наконечниках электромагнита просверливают отверстия, через которые пропускается световой луч. Исследуемое вещество помещается между полюсами электромагнита.

Угол поворота плоскости поляризации φ пропорционален пути l, проходимому светом в веществе, и намагниченности вещества. Намагниченность в свою очередь пропорциональна напряженности магнитного поля H (см. формулу (7.14) кн. 2). Поэтому можно написать, что

$$\varphi = VlH. \tag{6.24}$$

Коэффициент V называется постоянной Верде или удельным магнитным вращением. Постоянная V, как и постоянная вращения α, зависит от длины волны.

Направление вращения определяется направлением магнитного поля. От направления луча знак вращения не зависит. Поэтому если, отразив луч зеркалом, заставить его пройти через намагниченное вещество еще раз в обратном направлении, поворот плоскости поляризации удвоится.

Магнитное вращение плоскости поляризации обусловлено возникающей под действием магнитного поля прецессией электронных орбит (см. § 7.7 кн. 2).

Оптически активные вещества под действием магнитного поля приобретают дополнительную способность вращать плоскость поляризации, которая складывается с их естественной способностью.

Глава 7

Взаимодействие электромагнитных волн с веществом

7.1. Дисперсия света

Дисперсией света называются явления, обусловленные зависимостью показателя преломления вещества от частоты. Эту зависимость можно охарактеризовать функцией

$$n = f(\omega). \qquad (7.1)$$

Для всех прозрачных бесцветных веществ функция (7.1) имеет в видимой части спектра характер, показанный на рис. 7.1. С увеличением частоты показатель преломления возрастает: $dn/d\omega > 0$. В этом случае дисперсия называется нормальной.

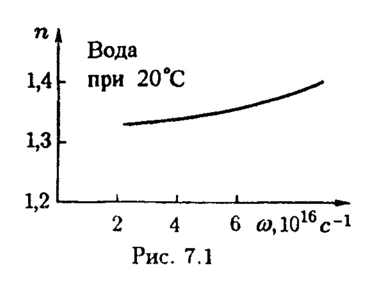


Рис. 7.1

Если вещество поглощает часть лучей, то в области поглощения и вблизи нее ход дисперсии обнаруживает аномалию — показатель преломления при увеличении частоты уменьшается: $dn/d\omega < 0$ (см. рис. 7.6). Такой ход зависимости n от ω называется аномальной дисперсией.

Среды, обладающие дисперсией, называются диспергирующими. В диспергирующих средах скорость световых волн зависит от частоты.

7.2. Групповая скорость

Строго монохроматическая волна вида

$$E = A\cos(\omega t - kx + \alpha) \qquad (7.2)$$

представляет собой бесконечную во времени и в пространстве последовательность «горбов» и «впадин», перемеща-

ющихся вдоль оси x с фазовой скоростью

$$v = \omega/k \tag{7.3}$$

(см. формулу (1.9)). С помощью такой волны нельзя передать никакого сигнала, так как каждый последующий «горб» ничем не отличается от предыдущего. Для передачи сигнала нужно на волне сделать «отметку», скажем, оборвав ее на некоторое время Δt. Однако в этом случае волна уже не будет описываться уравнением (7.2).

Проще всего передать сигнал с помощью светового импульса (рис. 7.2). Согласно теореме Фурье подобный импульс можно представить как наложение волн вида (7.2)

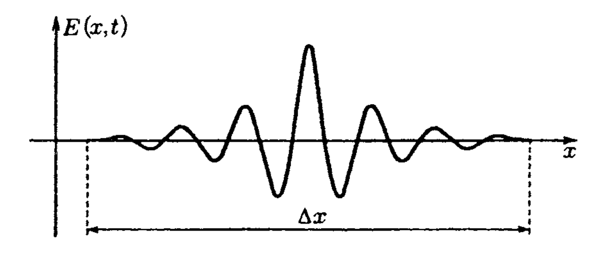


Рис. 7.2

с частотами, заключенными в некотором интервале $\Delta\omega$. Суперпозиция волн, мало отличающихся друг от друга по частоте, называется *волновым пакетом* или *группой волн*. Аналитическое выражение для группы волн имеет вид

$$E(x,t) = \int\limits_{\omega_0-\Delta\omega/2}^{\omega_0+\Delta\omega/2} A_\omega \cos(\omega t - k_\omega x + \alpha_\omega)\, d\omega \tag{7.4}$$

(индекс ω при A, k и α указывает на то, что эти величины для разных частот различны). При фиксированном t график функции (7.4) имеет вид, показанный на рис. 7.2. С изменением t график смещается вдоль оси x. В пределах пакета плоские волны в большей или меньшей степени усиливают друг друга, вне пакета они практически полностью гасят друг друга.

Соответствующий расчет показывает, что чем меньше ширина пакета Δx, тем больший интервал частот $\Delta\omega$ или соответственно больший интервал волновых чисел

Δk требуется для того, чтобы описать пакет с помощью выражения (7.4). Имеет место соотношение

$$\Delta k \cdot \Delta x \approx 2\pi. \qquad (7.5)$$

Подчеркнем, что для того чтобы суперпозицию волн, описываемую выражением (7.4), можно было считать группой волн, необходимо соблюдение условия $\Delta\omega \ll \omega_0$.

В недиспергирующей среде все плоские волны, образующие пакет, распространяются с одинаковой фазовой скоростью v. Очевидно, что в этом случае скорость движения пакета совпадает с v и форма пакета со временем не изменяется. Можно показать, что в диспергирующей среде пакет с течением времени расплывается — ширина его увеличивается. Если дисперсия невелика, расплывание пакета происходит не слишком быстро. В этом случае пакету можно приписать скорость u, под которой понимается скорость, с которой перемещается центр пакета, т. е. точка с максимальным значением E. Эту скорость называют **групповой скоростью**. В диспергирующей среде групповая скорость u отличается от фазовой скорости v (имеется в виду фазовая скорость гармонической составляющей с максимальной амплитудой, иными словами — фазовая скорость для доминирующей частоты).

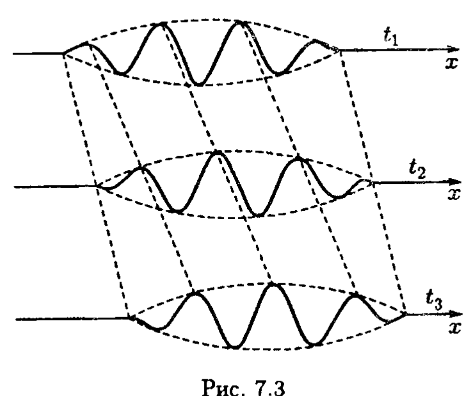


Рис. 7.3

Ниже мы покажем, что в случае, когда $dn/d\omega > 0$, групповая скорость оказывается меньше фазовой ($u < v$); в случае, когда $dn/d\omega < 0$, групповая скорость больше фазовой ($u > v$).

На рис. 7.3 показаны «фотографии» волнового пакета для трех последовательных моментов времени t_1, t_2 и t_3.

Рисунок выполнен для случая, когда $u < v$. Из рисунка видно, что наряду с перемещением пакета происходит движение «горбов» и «впадин» «внутри» пакета, причем у левой границы пакета все время зарождаются новые «горбы», которые, пробежав вдоль пакета, исчезают у его правой границы. В результате, в то время как пакет в целом перемещается со скоростью u, отдельные «горбы» и «впадины» перемещаются со скоростью v.

В случае, когда $u > v$, направления перемещения пакета и движения «горбов» внутри него оказываются противоположными.

Поясним сказанное на примере суперпозиции двух плоских волн с одинаковой амплитудой и разными λ. На рис. 7.4 дана «моментальная фотография» волн. Одна из них изображена сплошной линией, другая — штриховой.



Рис. 7.4

Интенсивность максимальна в точке A, где фазы обеих волн в данный момент совпадают. В точках B и C волны находятся в противофазе, вследствие чего интенсивность результирующей волны равна нулю. Допустим, что обе волны распространяются слева направо, причем скорость «сплошной» волны меньше, чем «штриховой» (в этом случае $dn/d\omega > 0$). Тогда место, в котором волны усиливают друг друга, будет со временем перемещаться влево относительно волн. В результате групповая скорость окажется меньше фазовой. Если скорость «сплошной» волны больше, чем «штриховой» $(dn/d\omega < 0)$, место, в котором происходит усиление волн, будет перемещаться вправо, так что групповая скорость окажется больше фазовой.

Напишем уравнения волн, положив для упрощения формул начальные фазы равными нулю:

$$E_1 = A\cos(\omega t - kx),$$
$$E_2 = A\cos[(\omega + \Delta\omega)t - (k + \Delta k)x].$$

Здесь $k = \omega/v_1$, $k + \Delta k = (\omega + \Delta\omega)/v_2$. Пусть $\Delta\omega \ll \omega$, соответственно $\Delta k \ll k$. Тогда, сложив колебания и произведя преобразования по формуле для суммы косинусов,

получим

$$E = E_1 + E_2 = \left[2A\cos\left(\frac{\Delta\omega}{2}t - \frac{\Delta k}{2}x\right)\right]\cos(\omega t - kx) \quad (7.6)$$

(во втором множителе мы пренебрегли $\Delta\omega$ по сравнению с ω и Δk по сравнению с k).

Множитель, стоящий в квадратных скобках, изменяется с x и t гораздо медленнее, чем второй множитель. Поэтому выражение (7.6) можно рассматривать как уравнение плоской волны, амплитуда которой изменяется по закону [1])

$$\text{Амплитуда} = \left|2A\cos\left(\frac{\Delta\omega}{2}t - \frac{\Delta k}{2}x\right)\right|.$$

В данном случае имеется ряд одинаковых максимумов амплитуды, определяемых условием

$$\frac{\Delta\omega}{2}t - \frac{\Delta k}{2}x_{\max} = \pm m\pi \quad (m = 0, 1, 2, \ldots). \quad (7.7)$$

Каждый из этих максимумов можно рассматривать как центр соответствующей группы волн.

Разрешив (7.7) относительно $x_{\max}$, получим

$$x_{\max} = \frac{\Delta\omega}{\Delta k}t + \text{const}.$$

Отсюда следует, что максимумы перемещаются со скоростью

$$u = \frac{\Delta\omega}{\Delta k}. \quad (7.8)$$

Полученное выражение представляет собой групповую скорость для случая, когда группа образована двумя составляющими.

Найдем скорость, с которой перемещается центр группы волн, описываемой выражением (7.4). Перейдя от косинусов к экспонентам, получим

$$E(x, t) = \int\limits_{\omega_0 - \Delta\omega/2}^{\omega_0 + \Delta\omega/2} \hat{A}_\omega \exp\left[i(\omega t - k_\omega x)\right] d\omega \quad (7.9)$$

---

[1]) Ср. с формулами (8.86) и (8.87) кн. 1. Зависимость функции (7.6) от x при фиксированном t изображается кривой, аналогичной кривой на рис. 7.5*а* кн. 1.

($\hat{A}_\omega = A_\omega \exp(i\alpha_\omega)$ — комплексная амплитуда). Разложим функцию $k_\omega = k(\omega)$ в ряд в окрестности ω_0:

$$k_\omega = k_0 + \left(\frac{dk}{d\omega}\right)_0 (\omega - \omega_0) + \ldots \qquad (7.10)$$

Здесь $k_0 = k(\omega_0)$, $(dk/d\omega)_0$ — значение производной в точке ω_0.

Перейдем к переменной $\xi = \omega - \omega_0$. Тогда $\omega = \omega_0 + \xi$, $d\omega = d\xi$. Произведя такую замену в (7.9) и подставив выражение (7.10) для k_ω, можно написать

$$E(x,t) = \exp[i(\omega_0 t - k_0 x)]\times$$
$$\times \int\limits_{-\Delta\omega/2}^{+\Delta\omega/2} \hat{A}_\xi \exp\left\{i\left[t - \left(\frac{dk}{d\omega}\right)_0 x\right]\xi\right\} d\xi. \qquad (7.11)$$

Мы пришли к уравнению плоской волны с частотой ω_0, волновым числом k_0 и комплексной амплитудой

$$\hat{A}(x,t) = \int\limits_{-\Delta\omega/2}^{+\Delta\omega/2} \hat{A}_\xi \exp\left\{i\left[t - \left(\frac{dk}{d\omega}\right)_0 x\right]\xi\right\} d\xi. \qquad (7.12)$$

Из (7.12) следует, что уравнение

$$t - \left(\frac{dk}{d\omega}\right)_0 x = \text{const} \qquad (7.13)$$

связывает время t и координату x той плоскости, в которой комплексная амплитуда имеет заданное фиксированное значение, в частности и такое значение, при котором модуль комплексной амплитуды, т. е. обычная амплитуда $A(x,t)$, достигает максимума.

Приняв во внимание, что $1/(dk/d\omega)_0 = (d\omega/dk)_0$, представим (7.13) в виде

$$x_{\max} = \left(\frac{d\omega}{dk}\right)_0 t - \text{const}' \quad \left(\text{const}' = \frac{\text{const}}{(dk/d\omega)_0}\right). \qquad (7.14)$$

Из (7.14) следует, что место, в котором амплитуда группы волн максимальна, перемещается со скоростью $(d\omega/dk)_0$. Таким образом, мы приходим к следующему выражению для групповой скорости:

$$u = \frac{d\omega}{dk} \qquad (7.15)$$

(индекс 0 опущен за ненадобностью). Ранее для группы из двух волн было получено аналогичное выражение (см. (7.8)).

Напомним, что мы пренебрегли членами высоких порядков малости в разложении (7.10). В этом приближении форма волнового пакета со временем не изменяется. Если учесть дальнейшие члены разложения, то для амплитуды получается выражение, из которого следует, что ширина пакета со временем растет — волновой пакет расплывается.

Выражению для групповой скорости можно придать другой вид. Заменив ω через vk (см. (7.3)), представим (7.15) следующим образом:

$$u = \frac{d(vk)}{dk} = v + k\frac{dv}{dk}. \tag{7.16}$$

Далее напишем

$$\frac{dv}{dk} = \frac{dv}{d\lambda}\frac{d\lambda}{dk}.$$

Из соотношения $\lambda = 2\pi/k$ вытекает, что $d\lambda/dk = -2\pi/k^2 = -\lambda/k$. Соответственно $dv/dk = -(dv/d\lambda)\times(\lambda/k)$. Подставив это значение в (7.16), получим

$$u = v - \lambda\frac{dv}{d\lambda}. \tag{7.17}$$

Из этой формулы видно, что в зависимости от знака $dv/d\lambda$ групповая скорость u может быть как меньше, так и больше фазовой скорости v. В отсутствие дисперсии $dv/d\lambda = 0$ и групповая скорость совпадает с фазовой.

Максимум интенсивности приходится на центр группы волн. Поэтому в тех случаях, когда понятие групповой скорости имеет смысл, скорость переноса энергии волной равна групповой скорости.

Понятие групповой скорости применимо только при условии, что поглощение энергии волны в данной среде невелико. При значительном затухании волн понятие групповой скорости утрачивает смысл. Такой случай имеет место в области аномальной дисперсии. В этой области поглощение очень велико, и понятие групповой скорости оказывается неприменимым.

7.3. Элементарная теория дисперсии

Дисперсия света может быть объяснена на основе электромагнитной теории и электронной теории вещества. Для этого нужно рассмотреть процесс взаимодействия света с веществом. Движение электронов в атоме подчиняется законам квантовой механики. В частности, понятие траектории электрона в атоме теряет всякий смысл. Однако, как показал Лоренц, для качественного понимания многих оптических явлений достаточно ограничиться гипотезой о существовании внутри атомов электронов, связанных квазиупруго. Будучи выведенными из положения равновесия, такие электроны начнут колебаться, постепенно теряя энергию колебания на излучение электромагнитных волн. В результате колебания будут затухающими. Затухание можно учесть, введя «силу трения излучения», пропорциональную скорости.

При прохождении через вещество электромагнитной волны каждый электрон оказывается под воздействием лоренцевой силы

$$\mathbf{F} = -e\mathbf{E} - e[\mathbf{vB}] = -e\mathbf{E} - e\mu_0[\mathbf{vH}] \qquad (7.18)$$

(см. формулу (6.38) кн. 2); заряд электрона равен $-e$). Согласно (2.23) отношение напряженностей магнитного и электрического полей в волне равно $H/E = \sqrt{\varepsilon_0/\mu_0}$. Следовательно, для отношения магнитной и электрической сил, действующих на электрон, получается из (7.18) значение

$$\frac{\mu_0 vH}{E} = \mu_o v\sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}} = v\sqrt{\varepsilon_0\mu_0} = \frac{v}{c}.$$

Даже если бы амплитуда колебаний электрона a достигла значения порядка 1 Å (10^{-10} м), т. е. порядка размеров атома, амплитуда скорости электрона $a\omega$ составила бы примерно $10^{-10} \cdot 3 \cdot 10^{15}$ м/с $= 3 \cdot 10^5$ м/с (согласно (3.6) $\omega = 2\pi\nu$ равна приблизительно $3 \cdot 10^{15}\,\text{с}^{-1}$). Таким образом, отношение v/c заведомо меньше 10^{-3}, так что вторым слагаемым в (7.18) можно пренебречь.

Итак, можно считать, что при прохождении через вещество электромагнитной волны каждый электрон находится под действием силы

$$F = -eE_0 \cos(\omega t + \alpha)$$

(α — величина, определяемая координатами данного электрона, E_0 — амплитуда напряженности электрического поля волны).

Видимый свет оказывает заметное воздействие только на внешние, слабее других связанные с атомом электроны, называемые валентными или оптическими электронами. Собственные частоты внутренних электронов сильно отличаются от частот оптического диапазона. Поэтому колебания внутренних электронов световой волной практически не возбуждаются.

Чтобы упростить вычисления, затуханием за счет излучения вначале будем пренебрегать. Впоследствие мы учтем затухание, внеся в полученные формулы соответствующие поправки. Кроме того, будем считать, что атомы не взаимодействуют друг с другом (что в первом приближении справедливо для газообразных веществ). В этом случае уравнение движения электрона имеет вид

$$\ddot{r} + \omega_0^2 r = -(e/m)E_0 \cos(\omega t + \alpha)$$

(см. формулу (8.13) кн. 1; ω_0 — собственная частота колебаний электрона). Добавим к правой части этого уравнения слагаемое $-i(e/m)E_0 \sin(\omega t + \alpha)$ и перейдем таким образом к комплексным функциям $\hat{E}$ и $\hat{r}$:

$$\ddot{\hat{r}}\omega_0^2 \hat{r} = -(e/m)\hat{E}_0 \exp(i\omega t). \qquad (7.19)$$

Здесь $\hat{E}_0 = E_0 \exp(i\alpha)$ — комплексная амплитуда электрического поля волны.

Будем искать решение уравнения в виде $\hat{r} = \hat{r}_0 \exp(i\omega t)$, где $\hat{r}_0$ — комплексная амплитуда колебаний электрона. Соответственно $\ddot{\hat{r}} = -\omega^2 r_0 \exp(i\omega t)$. Подстановка этих выражений в уравнение (7.19) приводит после сокращения на общий множитель $\exp(i\omega t)$ к соотношению

$$-\omega^2 \hat{r}_0 + \omega_0^2 \hat{r}_0 = -(e/m)\hat{E}_0.$$

Отсюда

$$\hat{r}_0 = \frac{-(e/m)\hat{E}_0}{\omega_0^2 - \omega^2}.$$

Умножим полученное равенство на $\exp(i\omega t)$:

$$\hat{r}(t) = \frac{-(e/m)\hat{E}(t)}{\omega_0^2 - \omega^2}.$$

Наконец, взяв вещественные части от комплексных функций функций $\hat{r}$ и $\hat{E}$, найдем r как функцию t:

$$r(t) = \frac{-(e/m)E(t)}{\omega_0^2 - \omega^2}. \qquad (7.20)$$

Чтобы упростить задачу, будем считать молекулы неполярными. Кроме того, поскольку массы ядер велики по сравнению с массой электрона, пренебрежем смещением ядер из положений равновесия под действием поля волны. В этом приближении дипольный электрический момент молекулы можно представить в виде

$$\mathbf{p}(t) = \sum_l q_l \mathbf{R}_{0l} + \sum_k e_k[\mathbf{r}_{0k} + \mathbf{r}_k(t)] =$$
$$= \left\{ \sum_l q_l \mathbf{R}_{0l} + \sum_k e_k \mathbf{r}_{0k} \right\} + \sum_k e_k \mathbf{r}_k(t) =$$
$$= \mathbf{p}_0 + \sum_k e_k \mathbf{r}_k(t) = \sum_k e_k \mathbf{r}_k(t),$$

где q_l и $\mathbf{R}_{0l}$ — заряды и радиусы-векторы равновесных положений ядер, e_k и $\mathbf{r}_{0k}$ — заряд и радиус-вектор равновесного положения k-го электрона, $\mathbf{r}_k(t)$ — смещение k-го электрона из положения равновесия под действием поля волны, $\mathbf{p}_0$ — дипольный момент молекулы в отсутствие поля, который по предположению равен нулю. Все $\mathbf{r}_k(t)$ колинеарны с $\mathbf{E}(t)$. Поэтому для проекции $\mathbf{p}(t)$ на направление $\mathbf{E}(t)$ получается выражение

$$p(t) = \sum_k e_k r_k(t) = \sum_k (-e) r_k(t)$$

(мы учли, что e_k для всех электронов одинаковы и равны $-e$). Подставим сюда значение (7.20) для $r(t)$, приняв во внимание, что входящие в состав молекулы электроны имеют неодинаковые собственные частоты ω_{0k}. В результате получим

$$p(t) = \sum_k \frac{e^2/m}{\omega_{0k}^2 - \omega^2} E(t). \qquad (7.21)$$

Обозначим число молекул в единице объема буквой N. Произведение $Np(t)$ дает поляризованность вещества $P(t)$. Согласно формулам (2.20) и (2.5) кн. 2 диэлектрическая проницаемость равна

$$\varepsilon = 1 + \kappa = 1 + \frac{P(t)}{\varepsilon_0 E(t)} = 1 + \frac{N}{\varepsilon_0} \frac{p(t)}{E(t)}.$$

Подставив сюда значение отношения $p(t)/E(t)$, получающееся из (7.21), и заменив ε через n^2 (см. 3.3)), придем к формуле

$$n^2 = 1 + \frac{N}{\varepsilon_0}\sum_k \frac{e^2/m}{\omega_{0k}^2 - \omega^2}. \tag{7.22}$$

При частотах ω, заметно отличающихся от всех собственных частот ω_{0k}, сумма в (7.22) будет мала по сравнению с единицей, так что $n^2 \approx 1$. Вблизи каждой из собственных частот функция (7.22) терпит разрыв: при стремлении ω к ω_{0k} слева она обращается в $+\infty$, при стремлении справа — в $-\infty$ (см. штриховые кривые на рис. 7.5). Такое поведение функции (7.22) обусловлено тем, что мы пренебрегли трением излучения (напомним, что при пренебрежении трением амплитуда вынужденных колебаний при резонансе обращается в бесконечность; см. формулу (8.129) кн. 1). Учет трения излучения приводит к зависимости n^2 от ω, показанной на рис. 7.5 сплошной кривой.

На рис. 7.6 дан участок кривой, изображающей зависимость n от ω в области одной из резонансных частот.

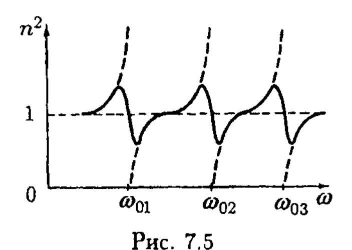


Рис. 7.5

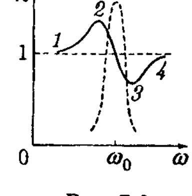


Рис. 7.6

Штриховая кривая на этом рисунке изображает ход коэффициента поглощения света веществом (см. следующий параграф). Участок *1–2* аналогичен кривой, приведенной на рис. 7.1. Участки *1–2* и *3–4* соответствуют нормальной дисперсии ($dn/d\omega > 0$). На участке *2–3* дисперсия аномальна ($dn/d\omega < 0$).

В области *3–4* показатель преломления меньше единицы, следовательно, фазовая скорость волны превышает c. Это обстоятельство не противоречит теории относительности, основывающейся на утверждении, что скорость передачи сигнала не может превзойти c. В преды-

дущем параграфе мы выяснили, что передать сигнал с помощью идеально монохроматической волны невозможно. Передача же энергии (т. е. сигнала) с помощью не вполне монохроматической волны (группы волн) осуществляется со скоростью, равной групповой скорости, определяемой формулой (7.17). В области нормальной дисперсии $dv/d\lambda > 0$, так что, хотя $v > c$, групповая скорость оказывается меньше c. В области аномальной дисперсии понятие групповой скорости теряет смысл (поглощение очень велико). Поэтому вычисленное по формуле (7.17) значение u не будет характеризовать скорости передачи энергии. Соответствующий расчет дает и в этой области для скорости передачи энергии значение, меньшее c.

7.4. Поглощение света

При прохождении световой волны через вещество часть энергии волны затрачивается на возбуждение колебаний электронов. Частично эта энергия вновь возвращается излучению в виде вторичных волн, порождаемых электронами; частично же она переходит в энергию движения атомов, т. е. во внутреннюю энергию вещества. Поэтому интенсивность света при прохождении через вещество уменьшается — свет поглощается в веществе. Вынужденные колебания электронов, а следовательно, и поглощение света становятся особенно интенсивными при резонансной частоте (см. изображенную штрихами кривую поглощения на рис. 7.6).

Опыт показывает, что интенсивность света при прохождении через вещество убывает по экспоненциальному закону:

$$I = I_0 \exp(-\kappa l). \qquad (7.23)$$

Здесь I_0 — интенсивность света на входе в поглощающий слой (на границе или в каком-то месте внутри вещества), l — толщина слоя, κ — постоянная, зависящая от свойств поглощающего вещества и называемая **коэффициентом поглощения**. Соотношения (7.23) носит название **закона Бугера**[2]).

Продифференцировав соотношение (7.23), получим

$$dI = -\kappa I_0 \exp(-\kappa l)\, dl = -\kappa I\, dl. \qquad (7.24)$$

[2]) Пьер Бугер (1698–1758) — французский ученый.

Из этого выражения следует, что убыль интенсивности на пути dl пропорциональна длине этого пути и значению самой интенсивности. Коэффициентом пропорциональности служит коэффициент поглощения.

Из формулы (7.23) вытекает, что при $l = 1/\kappa$ интенсивность I оказывается в e раз меньше, чем I_0. Таким образом, коэффициент поглощения есть величина, обратная толщине слоя, при прохождении которого интенсивность света убывает в e раз.

Коэффициент поглощения зависит от длины волны света λ (или частоты ω). У вещества, атомы (или молекулы) которого практически не воздействуют друг на друга (газы и пары металлов при невысоком давлении), коэффициент поглощения для большинства длин волн близок к нулю и лишь для очень узких спектральных областей (шириной в несколько сотых ангстрема) обнаруживает резкие максимумы (рис. 7.7). Эти максимумы соответствуют резонансным частотам колебаний электронов внутри атомов. В случае многоатомных молекул обнаруживаются также частоты, соответствующие колебаниям атомов внутри молекул. Поскольку массы атомов в десятки тысяч раз больше массы электрона, молекулярные частоты бывают намного меньше атомных — они попадают в инфракрасную область спектра.

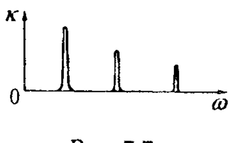


Рис. 7.7

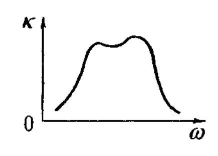


Рис. 7.8

Газы при высоких давлениях, а также жидкости и твердые тела дают широкие полосы поглощения (рис. 7.8). По мере повышения давления газов максимумы поглощения, первоначально очень узкие (см. рис. 7.7), все более расширяются, и при высоких давлениях спектр поглощения газов приближается к спектрам поглощения жидкостей. Этот факт указывает на то, что расширение полос поглощения есть результат взаимодействия атомов друг с другом.

Металлы практически непрозрачны для света (коэффициент κ для них имеет значение порядка 10^6 м$^{-1}$; для

сравнения укажем, что для стекла $\kappa \approx 1$ м$^{-1}$). Это обусловлено наличием в металлах свободных электронов. Под действием электрического поля световой волны свободные электроны приходят в движение — в металле возникают быстропеременные токи, сопровождающиеся выделением ленц-джоулевой теплоты. В результате энергия световой волны быстро убывает, превращаясь во внутреннюю энергию металла.

7.5. Рассеяние света

С классической точки зрения процесс рассеяния света заключается в том, что свет, проходящий через вещество, вызывает колебания электронов в атомах. Колеблющиеся электроны возбуждают вторичные волны, распространяющиеся по всем направлениям. Это явление, казалось бы, должно при всех условиях приводить к рассеянию света. Однако вторичные волны являются когерентными, так что необходимо учесть их взаимную интерференцию.

Соответствующий расчет показывает, что в случае однородной среды вторичные волны полностью гасят друг друга во всех направлениях, кроме направления распространения первичной волны. Поэтому перераспределения света по направлениям, т. е. рассеяния света, не происходит.

Вторичные волны не погашают друг друга в боковых направлениях только при распространении света в неоднородной среде. Световые волны, дифрагируя на неоднородностях среды, дают дифракционную картину, характеризующуюся довольно равномерным распределением интенсивности по всем направлениям. Такую дифракцию на мелких неоднородностях называют *рассеянием света*.

Среды с явно выраженной оптической неоднородностью носят название *мутных сред*. К их числу относятся: 1) дымы, т. е. взвеси в газах мельчайших твердых частиц; 2) туманы — взвеси в газах мельчайших капелек жидкости; 3) взвеси или суспензии, образованные плавающими в жидкости твердыми частичками; 4) эмульсии, т. е. взвеси мельчайших капелек одной жидкости в другой, не растворяющей первую (примером эмульсии может служить молоко, представляющее собой взвесь капелек жира в воде); 5) твердые тела вроде перламутра, опалов, молочных стекол и т. п.

Свет, рассеянный на частицах, размеры которых значительно меньше длины световой волны, оказывается частично поляризованным. Это объясняется тем, что колебания электронов, вызванные рассеиваемым световым пучком, происходят в плоскости, перпендикулярной к пучку (рис. 7.9). Колебания вектора $\mathbf{E}$ во вторичной волне происходят в плоскости, проходящей через направление колебаний зарядов (см. рис. 2.6). Поэтому свет, рассеиваемый частицами в направлениях, перпендикулярных к пучку, будет полностью поляризован. В направлениях, образующих с пучком угол, отличный от прямого, рассеянный свет поляризован только частично.



Рис. 7.9

В результате рассеяния света в боковых направлениях интенсивность в направлении распространения убывает быстрее, чем в случае одного лишь поглощения. Поэтому для мутного вещества в выражении (7.23), наряду с коэффициентом поглощения κ, должен стоять добавочный коэффициент κ', обусловленный рассеянием:

$$I = I_0 \exp[-(\kappa + \kappa')l]. \tag{7.25}$$

Постоянная κ' называется *коэффициентом экстинкции*.

Если размеры неоднородностей малы по сравнению с длиной световой волны (не более $0,1\lambda$), интенсивность рассеянного света оказывается пропорциональной четвертой степени частоты или обратно пропорциональной четвертой степени длины волны:

$$I \sim \omega^4 \sim \frac{1}{\lambda^4}. \tag{7.26}$$

Эта зависимость носит название *закона Рэлея*. Ее происхождение легко понять, если учесть, что мощность излучения колеблющегося заряда прямо пропорциональна четвертой степени частоты и, следовательно, обратно пропорциональна четвертой степени длины волны (см. формулу (2.45)).

Если размеры неоднородностей сравнимы с длиной волны, электроны, находящиеся в различных местах неоднородности, колеблются с заметным сдвигом по фазе. Это обстоятельство усложняет явление и приводит к другим закономерностям — интенсивность рассеянного света

становится прямо пропорциональной всего лишь квадрату частоты (обратно пропорциональной квадрату длины волны).

Проявление закономерности (7.26) легко наблюдать, пропуская пучок белого света через сосуд с мутной жидкостью (рис. 7.10). Вследствие рассеяния след пучка в жидкости хорошо виден сбоку, причем, поскольку короткие световые волны рассеиваются гораздо сильнее длинных, этот след представляется голубоватым. Прошедший через жидкость пучок оказывается обогащенным длинноволновым излучением и образует на экране Э не белое, а красновато-желтое пятно. Поставив на входе пучка в сосуд поляризатор P, мы обнаружим, что интенсивность рассеянного света в различных направлениях, перпендикулярных к первичному пучку, не одинакова. Направленность излучения диполя (см. рис. 2.7) приводит к тому, что в направлениях, совпадающих с плоскостью колебаний первичного пучка, интенсивность рассеянного света практически равна нулю, в направлениях же, перпендикулярных к плоскости колебаний, интенсивность рассеянного света максимальна. Поворачивая поляризатор вокруг направления первичного пучка, мы будем наблюдать попеременное усиление и ослабление света, рассеивающегося в данном направлении.

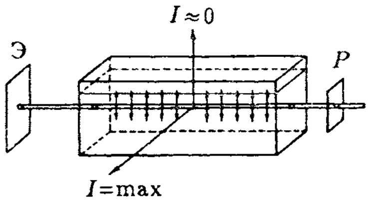


Рис. 7.10

Даже тщательно очищенные от посторонних примесей и загрязнений жидкости и газы в некоторой степени рассеивают свет. Мандельштам[3]) и Смолуховский[4]) установили, что причиной появления оптических неоднородностей являются в этом случае флуктуации плотности (т. е. наблюдаемые в пределах малых объемов отклонения плотности от ее среднего значения). Эти флуктуации вызваны беспорядочным движением молекул вещества; поэтому обусловленное ими рассеяние света называется **молекулярным**.

---

[3]) Леонид Исаакович Мандельштам (1879–1944) — советский физик.

[4]) Мариан Смолуховский (1872–1917) — польский физик-теоретик.

Молекулярным рассеянием объясняется голубой цвет неба. Непрерывно возникающие в атмосфере, вследствие беспорядочного молекулярного движения, места сгущения и разрежения воздуха рассеивают солнечный свет. При этом согласно закону (7.26) голубые и синие лучи рассеиваются сильнее, чем желтые и красные, обусловливая голубой цвет неба. Когда Солнце находится низко над горизонтом, распространяющиеся непосредственно от него лучи проходят большую толщу рассеивающей среды, в результате чего они оказываются обогащенными большими длинами волн. По этой причине небо на заре окрашивается в красные тона.

Особенно благоприятные условия для возникновения значительных флуктуаций плотности имеются вблизи критического состояния вещества (в критической точке $dp/dV = 0$; см. § 6.4 кн. 3). Эти флуктуации приводят к столь интенсивному рассеянию света, что «на просвет» стеклянная ампула с веществом кажется совершенно черной. Это явление называется критической опалесценцией.

7.6. Эффект Вавилова–Черенкова

В 1934 г. Черенков[5]), работавший под руководством Вавилова[6]) обнаружил особый вид свечения жидкостей под действием γ-лучей радия. Вавилов высказал правильное предположение, что источником излучения служат быстрые электроны, создаваемые γ-лучами. Это явление получило название эффекта Вавилова–Черенкова. Его полное теоретическое объяснение было дано в 1937 г. Таммом[7]) и Франком[8]). (В 1958 г. работа Черенкова, Тамма и Франка была отмечена Нобелевской премией.)

Согласно электромагнитной теории заряд, движущийся равномерно, не излучает электромагнитных волн (см. § 2.6). Однако, как показали Тамм и Франк, это справедливо лишь в том случае, если скорость v заряженной частицы не превышает фазовую скорость c/n электромагнитных волн в той среде, в которой движется частица.

[5]) Павел Алексеевич Черенков (1904–1990) — советский физик.

[6]) Сергей Иванович Вавилов (1891–1951) — советский физик.

[7]) Игорь Евгеньевич Тамм (1895–1971) — советский физик.

[8]) Илья Михайлович Франк (1908–1990) — советский физик.

При условии, что $v > c/n$, даже двигаясь равномерно, частица излучает электромагнитные волны. В действительности частица теряет энергию на излучение, вследствие чего движется с отрицательным ускорением. Но это ускорение является не причиной (как в случае $v < c/n$), а следствием излучения. Если бы потеря энергии за счет излучения восполнялась каким-либо способом, то частица, движущаяся равномерно со скоростью $v > c/n$, все равно была бы источником излучения.

Эффект Вавилова–Черенкова наблюдался экспериментально для электронов, протонов и мезонов при движении их в жидких и твердых средах.

В излучении Вавилова–Черенкова преобладают короткие волны, поэтому оно имеет голубую окраску. Наиболее характерным свойством этого излучения является то, что оно испускается не по всем направлениям, а лишь вдоль образующих конуса, ось которого совпадает с направлением скорости частицы (рис. 7.11). Угол ϑ между направлениями распространения излучения и вектором скорости частицы определяется соотношением

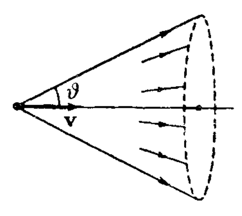


Рис. 7.11

$$\cos\vartheta = \frac{c/n}{v} = \frac{c}{nv}. \tag{7.27}$$

Эффект Вавилова–Черенкова находит широкое применение в экспериментальной технике. В так называемых *счетчиках Черенкова* световая вспышка, порождаемая быстродвижущейся заряженной частицей, превращается с помощью фотоумножителя[9]) в импульс тока. Для того чтобы заставить сработать такой счетчик, энергия частицы должна превысить пороговое значение, определяемое условием $v = c/n$. Поэтому черенковские счетчики позволяют не только регистрировать частицы, но и судить об их энергии. Удается даже определить угол ϑ между направлением вспышки и скоростью частицы, что дает возможность вычислить по формуле (7.27) скорость (а следовательно, и энергию) частицы.

---

[9]) Фотоумножителем называют электронный умножитель, первый электрод которого (фотокатод) способен испускать электроны под действием света.

Глава 8

Оптика движущихся сред

8.1. Скорость света

Скорость света в вакууме является одной из фундаментальных физических величин. Установление конечности скорости света имело огромное принципиальное значение. Конечность скорости передачи сигналов, передачи взаимодействия, лежит в основе теории относительности.

В связи с тем, что числовое значение скорости света очень велико, экспериментальное определение этой скорости представляет собой весьма сложную задачу. Первые определения скорости света были осуществлены на основании астрономических наблюдений. В 1676 г. Рёмер[1]) определил скорость света из наблюдений за затмениями спутников Юпитера. Он получил значение, равное 215 000 км/с.

Движение Земли по орбите приводит к тому, что видимое положение звезд на небесной сфере изменяется. Это явление, называемое аберрацией света, использовал в 1727 г. английский астроном Бредли для определения скорости света.

Предположим, что направление на наблюдаемую в телескоп звезду перпендикулярно к плоскости земной орбиты. Тогда угол между направлением на звезду и вектором скорости Земли $\mathbf{v}$ будет в течение всего года равен $\pi/2$ (рис. 8.1). Направим ось телескопа точно на звезду. За время τ, которое требуется свету, чтобы пройти расстояние от объектива до окуляра, телескоп сместится вместе с Землей в направлении, перпендикулярном к лучу света, на расстояние $v\tau$. В результате изображение звезды окажется не в центре окуляра. Для того чтобы изображение оказалось точно в центре окуляра, нужно повернуть ось телескопа в направлении вектора $\mathbf{v}$ на угол α, тангенс которого определяется соотношением

$$\operatorname{tg}\alpha = v/c \tag{8.1}$$

---

[1]) Оле Рёмер (1644-1710) — датский астроном.

(см. рис. 8.1). Точно так же падающие вертикально капли дождя пролетят сквозь длинную трубу, установленную на движущейся тележке, лишь в том случае, если наклонить ось трубы в направлении движения тележки.

Итак, видимое положение звезды оказывается смещенным относительного истинного на угол α. Вектор скорости Земли все время поворачивается в плоскости орбиты. Поэтому ось телескопа тоже поворачивается, описывая конус вокруг истинного направления на звезду. Соответственно видимое положение звезды на небесной сфере описывает окружность, угловой диаметр которой равен 2α. Если направление на звезду образует с плоскостью земной орбиты угол, отличный от прямого, видимое положение звезды описывает эллипс, большая ось которого имеет угловой размер 2α. Для звезды, лежащей в плоскости орбиты, эллипс вырождается в прямую.

Из астрономических наблюдений Бредли нашел, что $2\alpha = 40,9''$. Соответствующее значение c, полученное по формуле (8.1), оказалось равным 303 000 км/с.

Рис. 8.1

В земных условиях скорость света была впервые измерена Физо[2]) в 1849 г. Схема опыта дана на рис. 8.2. Свет от источника S падал на полупрозрачное зеркало. Отразившийся от зеркала свет попадал на край

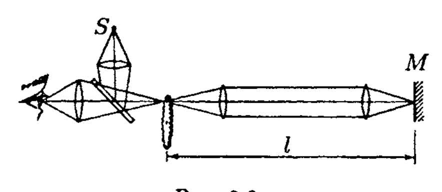


Рис. 8.2

быстро вращающегося зубчатого диска. Всякий раз, когда против светового пучка оказывалась прорезь между зубцами, возникал световой импульс, который доходил до зеркала M и отражался обратно. Если в момент, когда свет

[2]) Арман Ипполит Луи Физо (1819–1896) — французский физик.

возвращался к диску, против пучка оказывалась прорезь, отраженный импульс проходил частично через полупрозрачное зеркало и попадал в глаз наблюдателя. Если на пути отраженного импульса оказывался зубец диска, наблюдатель света не видел.

За время $\tau = 2l/c$, которое свет затрачивал на прохождение пути до зеркала M и обратно, диск успевал повернуться на угол $\Delta\varphi = \omega\tau = 2l\omega/c$, где ω — угловая скорость вращения диска. Пусть число зубцов диска равно N. Тогда угол между серединами соседних зубцов равен $\alpha = 2\pi/N$. Свет не возвращался в глаз наблюдателя при таких скоростях вращения диска, при которых за время τ диск успевал повернуться на углы $\alpha/2$, $3\alpha/2$, ..., $(m - 1/2)\alpha$ и т. д. Следовательно, условие m-го затемнения имеет вид

$$\Delta\varphi = (m - 1/2)\alpha \quad \text{или} \quad 2l\omega_m/c = (m - 1/2) \cdot 2\pi/N.$$

По этой формуле, зная l, N и угловую скорость ω_m, при которой получается m-е затемнение, можно определить c. В опыте Физо l было равно примерно 8,6 км. Для c получилось значение 313 000 км/с.

В 1928 г. для измерения скорости света были использованы ячейки Керра (см. § 6.7). С их помощью можно осуществить прерывание светового пучка с гораздо большей частотой ($\sim 10^7$ с$^{-1}$), чем с помощью зубчатого диска. Это позволило произвести измерения c при l порядка нескольких метров.

Майкельсон произвел несколько измерений скорости света методом вращающейся призмы. В опыте Майкельсона, осуществленном в 1932 г., свет распространялся в трубе длиной 1,6 км, из которой был откачен воздух.

В настоящее время скорость света в вакууме принимается равной

$$c = 299\ 792\ 458 \text{ м/с}. \tag{8.2}$$

Отметим, что во всех опытах, в которых осуществлялось прерывание света, определялась не фазовая, а групповая скорость световых волн. В воздухе эти две скорости практически совпадают.

8.2. Опыт Физо

До сих пор мы предполагали, что источники, приемники и другие тела, относительно которых рассматривалось распространение света, неподвижны. Естественно

заинтересоваться вопросом, как скажется на распространении света движение источника световых волн. При этом возникает необходимость указать, относительно чего происходит движение. В § 1.11 мы выяснили, что движение источника или приемника звуковых волн относительно среды, в которой эти волны распространяются, оказывает влияние на протекающие акустические явления (эффект Доплера) и, следовательно, может быть обнаружено.

Первоначально волновая теория рассматривала свет как упругие волны, распространяющиеся в некой гипотетической среде, получившей название мирового эфира. После создания теории Максвелла на смену упругому эфиру пришел эфир — носитель электромагнитных волн и полей. Под этим эфиром подразумевалась особая среда, заполняющая, как и ее предшественник, упругий эфир, все мировое пространство и пронизывающая все тела. Раз эфир представлял собой некую среду, можно было рассчитывать обнаружить движение тел, например источников или приемников света, по отношению к этой среде. В частности, следовало ожидать существования «эфирного ветра», обдувающего Землю при ее движении вокруг Солнца.

В механике был установлен принцип относительности Галилея, согласно которому все инерциальные системы отсчета являются в механическом отношении равноправными. Обнаружение эфира сделало бы возможным выделение (с помощью оптических явлений) особенной (связанный с эфиром), преимущественной, абсолютной системы отсчета. Тогда движение остальных систем можно было бы рассматривать по отношению к этой абсолютной системе.

Таким образом, выяснение вопроса о взаимодействии мирового эфира с движущимися телами играло принципиальную роль. Можно было допустить три возможности: 1) эфир совершенно не возмущается движущими телами; 2) эфир увлекается движущимися телами частично, приобретая скорость, равную αv, где v — скорость тела относительно абсолютной системы отсчета, α — коэффициент увлечения, меньшей единицы; 3) эфир полностью увлекается движущимися телами, например Землей, подобно тому, как тело при своем движении увлекает прилежащие к его поверхности слои газа. Однако последняя возможность опровергается существованием явления аберрации света. В предыдущем параграфе мы выяснили, что

изменение видимого положения звезд может быть объяснено движением телескопа относительно системы отсчета (среды), в которой распространяется световая волна.

Для выяснения вопроса о том, увлекается ли эфир движущимися телами, Физо осуществил в 1851 г. следующий опыт. Параллельный пучок света от источника S разделялся посеребренной полупрозрачной пластинкой P на два пучка, обозначенных цифрами *1* и *2* (рис. 8.3). За счет отражения от зеркал M_1, M_2 и M_3 пучки, пройдя в общей сложности одинаковый путь L, снова попадали на пластинку P. Пучок *1* частично проходил через P, пучок *2* частично отражался, в результате чего возникали два

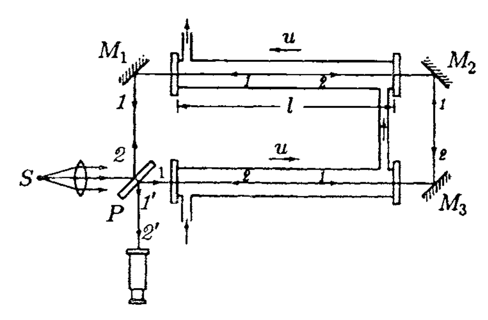


Рис. 8.3

когерентных пучка *1'* и *2'*, которые давали в фокальной плоскости зрительной трубы интерференционную картину в виде полос. На пути пучков *1* и *2* были установлены две трубы, по которым могла пропускаться вода со скоростью u в направлениях, указанных стрелками. Луч *2* распространялся в обеих трубах навстречу току воды, луч *1* — по течению.

При неподвижной воде пучки *1* и *2* проходят путь L за одинаковое время. Если вода при своем движении хотя бы частично увлекает эфир, то при включении тока воды луч *2*, который распространяется против течения, затратит на прохождение пути L большее время, чем луч *1*, распространяющийся по течению. В результате между лучами возникнет некоторая разность хода, и интерференционная картина сместится.

Интересующая нас разность хода возникает лишь на пути лучей, пролегающем в воде. Этот путь имеет длину $2l$. Обозначим скорость света относительно эфира в воде

буквой v. Когда эфир не увлекается водой, скорость света относительно установки будет совпадать с v. Предположим, что вода при своем движении частично увлекает эфир, сообщая ему относительно установки скорость αu (u — скорость воды, α — коэффициент увлечения). Тогда скорость света относительно установки будет равна $v + \alpha u$ для луча *1* и $v - \alpha u$ для луча *2*. Луч *1* пройдет путь $2l$ за время $t_1 = 2l/(v + \alpha u)$, луч *2* — за время $t_2 = 2l/(v - \alpha u)$. Из формулы (3.56) вытекает, что оптическая длина пути, на прохождение которой затрачивается время t, равна ct. Следовательно, разность хода лучей *1* и *2* равна $\Delta = c(t_2 - t_1)$. Разделив Δ на λ_0, получим число полос, на которое сместится интерференционная картина при включении тока воды:

$$\Delta N = \frac{c(t_2 - t_1)}{\lambda_0} = \frac{c}{\lambda_0}\left(\frac{2l}{v - \alpha u} - \frac{2l}{v + \alpha u}\right) = \\ = \frac{4cl\alpha u}{\lambda_0(v^2 - \alpha^2 u^2)}.$$

Физо обнаружил, что интерференционные полосы действительно смещаются. Соответствующее смещению значение коэффициента увлечения оказалось равным

$$\alpha = 1 - \frac{1}{n^2}, \qquad (8.3)$$

где n — показатель преломления воды. Таким образом, опыт Физо показал, что эфир (если он существует) увлекается движущейся водой только частично.

Легко убедиться в том, что результат опыта Физо объясняется релятивистским законом сложения скоростей. Согласно формуле (6.33) кн. 1 скорости v_x и v'_x некоторого тела в системах K и K' связаны соотношением

$$v_x = \frac{v'_x + v_0}{1 + v_0 v'_x/c^2} \qquad (8.4)$$

(v_0 — скорость системы K' относительно системы K).

Свяжем с прибором Физо систему отсчета K, а с движущейся водой — систему K'. Тогда роль v_0 будет играть скорость течения воды u, роль v'_x — скорость света относительно воды, равная c/n, и, наконец, роль v_x — скорость

света относительно прибора $v_{\text{приб}}$. Подстановка этих значений в формулу (8.4) дает

$$v_{\text{приб}} = \frac{c/n + u}{1 + u(c/n)/c^2} = \frac{c/n + u}{1 + u/(cn)}.$$

Скорость течения воды u много меньше c. Поэтому полученное выражение можно упростить следующим образом:

$$v_{\text{приб}} = \frac{c/n + u}{1 + u/(cn)} \approx \left(\frac{c}{n} + u\right)\left(1 - \frac{u}{cn}\right) \approx \frac{c}{n} + u\left(1 - \frac{1}{n^2}\right) \tag{8.5}$$

(мы пренебрегли членом u^2/cn).

Согласно классическим представлениям скорость света относительно прибора $v_{\text{приб}}$ равна сумме скорости света относительно эфира, т. е. c/n, и скорости эфира относительно прибора, т. е. αu:

$$v_{\text{приб}} = c/n + \alpha u.$$

Сравнение с формулой (8.5) дает для коэффициента увлечения α значение, полученное Физо (см. (8.3)).

Следует иметь в виду, что одинакова во всех системах отсчета лишь скорость света в вакууме. Скорость света в веществе различна в разных системах отсчета. Значение c/n она имеет в системе отсчета, связанной со средой, в которой происходит распространение света.

8.3. Опыт Майкельсона

В 1881 г. Майкельсон осуществил знаменитый опыт, с помощью которого он рассчитывал обнаружить движение Земли относительно эфира (эфирный ветер). В 1887 г. Майкельсон повторил свой опыт совместно с Морли[3]) на более совершенном приборе. Установка Майкельсона — Морли изображена на рис. 8.4. Кирпичное основание поддерживало кольцевой чугунный желоб с ртутью. На ртути плавал деревянный поплавок, имеющий форму нижней половины разрезанного вдоль бублика. На этот поплавок устанавливалась массивная квадратная каменная плита.

---

[3]) Эдвард Морли (1838–1923) — американский химик

Такое устройство позволяло плавно поворачивать плиту вокруг вертикальной оси прибора. На плите монтировал-

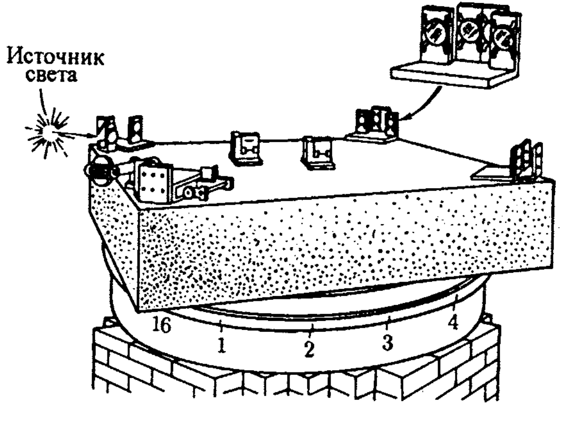


Рис. 8.4.

ся интерферометр Майкельсона (см. рис. 4.16), видоизмененный так, что оба луча, прежде чем вернуться к полупрозрачной пластинке, несколько раз проходили туда и

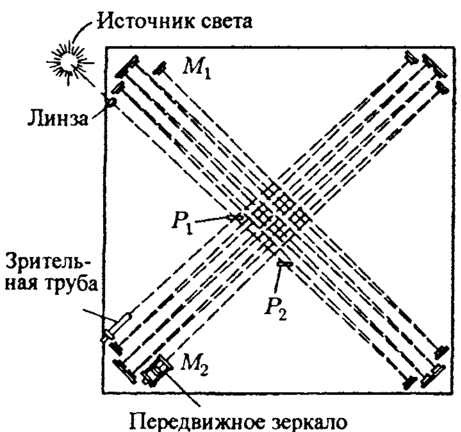


Рис. 8.5

обратно путь, совпадающий с диагональю плиты. Схема хода лучей показана на рис. 8.5. Обозначения на этом рисунке соответствуют обозначениям на рис 4.16.

В основе опыта лежали следующие соображения. Предположим, что плечо PM_2 интерферометра (рис. 8.6) совпадает с направлением движения Земли относительно эфира. Тогда время, необходимое лучу *1*, чтобы пройти путь до зеркала M_1 и обратно, будет отлично от времени, необходимого для прохождения пути PM_2P лучом *2*. В результате даже при равенстве длин обоих плеч лучи *1* и *2* приобретут некоторую разность хода. Если повернуть прибор на 90°, плечи поменяются местами и разность хода изменит знак. Это должно привести к смещению интерференционной картины, величину которого, как показали произведенные Майкельсоном расчеты, вполне можно было бы обнаружить.

Чтобы вычислить ожидаемое смещение интерференционной картины, найдем времена прохождения соответствующих путей лучами *1* и *2*. Пусть скорость Земли относительно эфира равна v. Если эфир не увлекается Землей и скорость света относительно эфира равна c (показатель преломления воздуха практически равен единице), то ско-

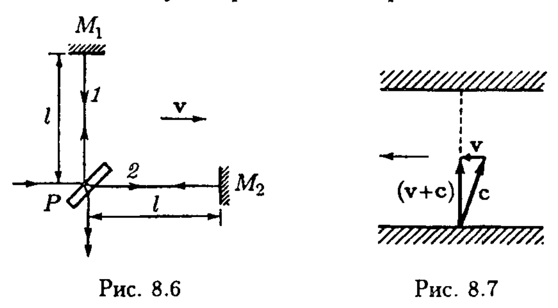


Рис. 8.6 Рис. 8.7

рость света относительно прибора будет равна $c - v$ для направления PM_2 и $c + v$ для направления M_2P. Следовательно, время для луча *2* определяется выражением

$$t_2 = \frac{l}{c-v} + \frac{l}{c+v} = \frac{2lc}{c^2 - v^2} = \frac{2l}{c}\frac{1}{1 - v^2/c^2} \approx \frac{2l}{c}\left(1 + \frac{v^2}{c^2}\right) \tag{8.6}$$

(скорость движения Земли по орбите равна 30 км/с, поэтому $v^2/c^2 = 10^{-8} \ll 1$).

Прежде чем приступить к вычислению времени t_1, рассмотрим следующий пример из механики. Пусть катеру, который развивает скорость c относительно воды, требуется пересечь реку, текущую со скоростью v, в направле-

нии, точно перпендикулярном к ее берегам (рис. 8.7). Для того чтобы катер перемещался в заданном направлении, его скорость c относительно воды должна быть направлена так, как показано на рисунке. Поэтому скорость катера относительно берегов будет равна $|\mathbf{c}+\mathbf{v}| = \sqrt{c^2 - v^2}$. Такова же будет (как предполагал Майкельсон) скорость луча *1* относительно прибора. Следовательно, время для луча *1* равно[4])

$$t_1 = \frac{2l}{\sqrt{c^2 - v^2}} = \frac{2l}{c}\frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \approx \frac{2l}{c}\left(1 + \frac{1}{2}\frac{v^2}{c^2}\right). \quad (8.7)$$

Подставив в выражение $\Delta = c(t_2 - t_1)$ значения (8.6) и (8.7) для t_2 и t_1, получим разность хода лучей *1* и *2*:

$$\Delta = 2l\left[\left(1 + \frac{v^2}{c^2}\right) - \left(1 + \frac{1}{2}\frac{v^2}{c^2}\right)\right] = l\frac{v^2}{c^2}.$$

При повороте прибора на 90° разность хода изменит знак. Следовательно, число полос, на которое сместится интерференционная картина, составит

$$\Delta N = \frac{2\Delta}{\lambda_0} = 2\frac{l}{\lambda_0}\frac{v^2}{c^2}. \quad (8.8)$$

Длина плеча l (учитывая многократные отражения) составляла 11 м. Длина волны света в опыте Майкельсона и Морли равнялась 0,59 мкм. Подстановка этих значений в формулу (8.8) дает

$$\Delta N = \frac{2 \cdot 11}{0,59 \cdot 10^{-6}} \cdot 10^{-8} = 0,37 \approx 0,4 \text{ полосы.}$$

Прибор позволял обнаружить смещение порядка 0,01 полосы. Однако никакого смещения интерференционной картины обнаружено не было. Чтобы исключить возможность того, что в момент измерений плоскость горизонта окажется перпендикулярной к вектору орбитальной скорости Земли, опыт повторялся в различное время суток. Впоследствии опыт производился многократно в различное время года (за год вектор орбитальной скорости Земли

[4]) Мы воспользовались формулами $\sqrt{1-x} \approx 1 - x/2$ и $1/(1-x) \approx \approx 1 + x$, справедливыми для малых x.

поворачивается в пространстве на 360°) и неизменно давал отрицательные результаты. Обнаружить эфирный ветер не удавалось. Мировой эфир оставался неуловимым.

Было предпринято несколько попыток объяснить отрицательный результат опыта Майкельсона, не отказываясь от гипотезы о мировом эфире. Однако все попытки оказались несостоятельными. Исчерпывающее непротиворечивое объяснение всех опытных фактов, в том числе и результатов опыта Майкельсона, было дано Эйнштейном в 1905 г. Эйнштейн пришел к выводу, что мирового эфира, т. е. особой среды, которая могла бы служить абсолютной системой отсчета, не существует. В соответствии с этим Эйнштейн распространил механический принцип относительности на все без исключения физические явления. Далее Эйнштейн постулировал в соответствии с опытными данными, что скорость света в вакууме одинакова во всех инерциальных системах отсчета и не зависит от движения источников и приемников света.

Принцип относительности и принцип постоянства скорости света образуют основу созданной Эйнштейном специальной теории относительности (см. гл. 6 кн. 1).

8.4. Эффект Доплера

В акустике изменение частоты, обусловленное эффектом Доплера, определяется скоростями движения источника и приемника по отношению к среде, являющейся носителем звуковых волн (см. формулу (1.78)). Для световых волн также существует эффект Доплера. Однако особой среды, которая служила бы носителем электромагнитных волн, не существует. Поэтому доплеровское смещение частоты световых волн определяется только относительной скоростью источника и приемника.

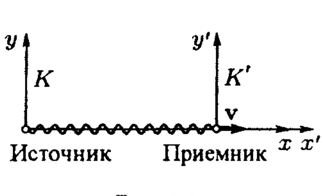


Рис. 8.8

Свяжем с источником света начало координат системы K, а с приемником — начало координат системы K' (рис. 8.8). Оси x и x' направим, как обычно, вдоль вектора скорости $\mathbf{v}$, с которой система K' (т. е. приемник) движется относительно системы K (т. е. источника). Уравнение плоской световой волны, испускаемой источником

по направлению к приемнику, будет в системе K иметь вид

$$E(x,t) = A\cos[\omega(t - x/c) + \alpha]. \qquad (8.9)$$

Здесь ω — частота волны, фиксируемая в системе отсчета, связанной с источником, т. е. частота, с которой колеблется источник. Мы предполагаем, что световая волна распространяется в вакууме; поэтому фазовая скорость равна c.

Согласно принципу относительности законы природы имеют одинаковый вид во всех инерциальных системах отсчета. Следовательно, в системе K' волна (8.9) описывается уравнением

$$E'(x',t') = A'\cos[\omega'(t' - x'/c) + \alpha'], \qquad (8.10)$$

где ω' — частота, фиксируемая в системе отсчета K', т. е. частота, воспринимаемая приемником. Мы снабдили штрихами все величины, кроме c, которая одинакова во всех системах отсчета.

Уравнение волны в системе K' можно получить из уравнения в системе K, перейдя от x и t к x' и t' с помощью преобразований Лоренца. Заменив в (8.9) x и t согласно формулам (6.17) кн. 1, получим

$$E(x',t') = A\cos\left\{\omega\left[\frac{t' + (v/c^2)x'}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} - \frac{x' + vt'}{c\sqrt{1 - v^2/c^2}}\right] + \alpha\right\}$$

(роль v_0 играет v). Последнее выражение легко привести к виду

$$E(x',t') = A\cos\left\{\omega\frac{1 - v/c}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}\left(t' - \frac{x'}{c}\right) + \alpha\right\}. \qquad (8.11)$$

Уравнение (8.11) описывает в системе K' ту же волну, что и уравнение (8.10). Поэтому должно выполняться соотношение

$$\omega' = \omega\frac{1 - v/c}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} = \omega\sqrt{\frac{1 - v/c}{1 + v/c}}.$$

Изменим обозначения: частоту источника ω обозначим через ω_0, а частоту приемника ω' — через ω. В результате формула примет вид

$$\omega = \omega_0\sqrt{\frac{1 - v/c}{1 + v/c}}. \qquad (8.12)$$

Перейдя от круговой частоты к обычной, получим

$$\nu = \nu_0 \sqrt{\frac{1 - v/c}{1 + v/c}}. \tag{8.13}$$

Фигурирующая в формулах (8.12) и (8.13) скорость v приемника по отношению к источнику есть величина алгебраическая. При удалении приемника $v > 0$ и согласно (8.12) $\omega < \omega_0$; при приближении приемника к источнику $v < 0$, так что $\omega > \omega_0$.

В случае, если $v \ll c$, формулу (8.12) можно приближенно записать следующим образом:

$$\omega \approx \omega_0 \frac{1 - (1/2)v/c}{1 + (1/2)v/c} \approx \omega_0 \left(1 - \frac{1}{2}\frac{v}{c}\right)\left(1 - \frac{1}{2}\frac{v}{c}\right).$$

Отсюда, ограничившись членами порядка v/c, получим

$$\omega = \omega_0 \left(1 - \frac{v}{c}\right). \tag{8.14}$$

Из этой формулы можно найти относительное изменение частоты:

$$\frac{\Delta\omega}{\omega} = -\frac{v}{c} \tag{8.15}$$

(под $\Delta\omega$ подразумевается $\omega - \omega_0$).

Можно показать, что, кроме рассмотренного нами продольного эффекта, для световых волн существует также поперечный эффект Доплера. Он заключается в уменьшении воспринимаемой приемником частоты, наблюдающемся в том случае, когда вектор относительной скорости направлен перпендикулярно к прямой, проходящей через приемник и источник[5]) (когда, например, источник движется по окружности, в центре которой помещается приемник). В этом случае частота ω_0 в системе источника связана с частотой ω в системе приемника соотношением

$$\omega = \omega_0 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \approx \omega_0 \left(1 - \frac{1}{2}\frac{v^2}{c^2}\right). \tag{8.16}$$

[5]) Напомним, что для звуковых волн поперечного эффекта Доплера не существует.

Относительное изменение частоты при поперечном эффекте Доплера

$$\frac{\Delta\omega}{\omega} = \frac{1}{2}\frac{v^2}{c^2} \tag{8.17}$$

пропорционально квадрату отношения v/c и, следовательно, значительно меньше, чем при продольном эффекте, для которого относительное изменение частоты пропорционально первой степени v/c.

Существование поперечного эффекта Доплера было доказано экспериментально Айвсом в 1938 г. В опытах Айвса определялось изменение частоты излучения атомов водорода в каналовых лучах (см. последний абзац § 12.6). Скорость атомов составляла примерно $2 \cdot 10^6$ м/с. Эти опыты представляют собой непосредственное экспериментальное подтверждение справедливости преобразований Лоренца.

В общем случае вектор относительной скорости можно разложить на две составляющие, одна из которых направлена вдоль луча, а другая — перпендикулярно к лучу. Первая составляющая обусловит продольный, вторая — поперечный эффект Доплера.

Продольный эффект Доплера используется для определения радиальной скорости звезд. Измерив относительное смещение линий в спектрах звезд, можно по формуле (8.12) определить v.

Тепловое движение молекул светящегося газа приводит вследствие эффекта Доплера к уширению спектральных линий. Из-за хаотичности теплового движения все направления скоростей молекул относительно спектрографа равновероятны. Поэтому в регистрируемом прибором излучении присутствуют все частоты, заключенные в интервале от $\omega_0(1 - v/c)$ до $\omega_0(1 + v/c)$, где ω_0 — частота, излучаемая молекулами, v — скорость теплового движения (см. формулу (8.14)). Таким образом, регистрируемая ширина спектральной линии составит $2\omega_0 v/c$. Величину

$$\delta\omega_D = 2\omega_0\frac{v}{c} \tag{8.18}$$

называют *доплеровской шириной спектральной линии* (под v подразумевается наиболее вероятная скорость молекул). По величине доплеровского уширения спектральных линий можно судить о скорости теплового движения молекул, а следовательно, и о температуре светящегося газа.

Приложение

Основные формулы электромагнетизма в СИ и в гауссовой системе

Наименование	СИ	Гауссова система
Плотность тока смещения	$j_{\text{см}} = \dot{\mathbf{D}}$	$j_{\text{см}} = \frac{1}{4\pi}\dot{\mathbf{D}}$
Уравнения Максвелла в дифференциальной форме	$\lvert\nabla \mathbf{E}\rvert = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$ $\nabla \mathbf{B} = 0$ $\lvert\nabla \mathbf{H}\rvert = \mathbf{j} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$ $\nabla \mathbf{D} = \rho$	$\lvert\nabla \mathbf{E}\rvert = -\frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$ $\nabla \mathbf{B} = 0$ $\lvert\nabla \mathbf{H}\rvert = \frac{4\pi}{c}\mathbf{j} + \frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$ $\nabla \mathbf{D} = 4\pi\rho$
Уравнение Максвелла в интегральной форме	$\oint_\Gamma \mathbf{E}\, d\mathbf{l} = -\int_S \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}\, d\mathbf{S}$ $\oint_S \mathbf{B}\, d\mathbf{S} = 0$ $\oint_\Gamma \mathbf{H}\, d\mathbf{l} = \int_S \mathbf{j}\, d\mathbf{S} +$ $+ \int_S \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}\, d\mathbf{S}$ $\oint_S \mathbf{D}\, d\mathbf{S} = \int_V \rho\, dV$	$\oint_\Gamma \mathbf{E}\, d\mathbf{l} = -\frac{1}{c}\int_S \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}\, d\mathbf{S}$ $\oint_S \mathbf{B}\, d\mathbf{S} = 0$ $\oint_\Gamma \mathbf{H}\, d\mathbf{l} = \frac{4\pi}{c}\int_S \mathbf{j}\, d\mathbf{S} +$ $+ \frac{1}{c}\int_S \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}\, d\mathbf{S}$ $\oint_S \mathbf{D}\, d\mathbf{S} = 4\pi\int_V \rho\, dV$
Скорость электромагнитных волн	$v = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon\mu}}$	
Соотношение между амплитудами векторов **E** и **H** в электромагнитной волне	$E_m\sqrt{\varepsilon_0\varepsilon} = H_m\sqrt{\mu_0\mu}$	$E_m\sqrt{\varepsilon} = H_m\sqrt{\mu}$
Вектор Пойнтинга	$\mathbf{S} = [\mathbf{E}\mathbf{H}]$	$\mathbf{S} = \frac{c}{4\pi}[\mathbf{E}\mathbf{H}]$
Плотность импульса электромагнитного поля	$\mathbf{K} = \frac{1}{c^2}[\mathbf{E}\mathbf{H}]$	$\mathbf{K} = \frac{1}{4\pi c}[\mathbf{E}\mathbf{H}]$

Предметный указатель

Игорь Владимирович САВЕЛЬЕВ

КУРС ОБЩЕЙ ФИЗИКИ

Том 4

Волны. Оптика

Учебное пособие

Издание пятое, исправленное

ЛР № 065466 от 21.10.97
Гигиенический сертификат 78.01.07.953.П.007216.04.10
от 21.04.2010 г., выдан ЦГСЭН в СПб

Издательство «ЛАНЬ»
lan@lanbook.ru; www.lanbook.com
192029, Санкт-Петербург, Общественный пер., 5.

Тел./факс: (812)412-29-35, 412-05-97, 412-92-72.
Бесплатный звонок по России: 8-800-700-40-71

Подписано в печать 05.05.11.
Бумага офсетная. Гарнитура Литературная. Формат 84×108 $^{1}/_{32}$.
Печать офсетная. Усл. п. л. 13,44. Тираж 1500 экз.

Заказ № **82.28**.

Отпечатано с готовых диапозитивов
в ООО «Северо-Западный Печатный двор».
188300, Ленинградская обл., г. Гатчина, ул. Железнодорожная, д. 45Б.
Тел.: (813) 714-01-81, (813) 714-01-82; факс: (813) 713-69-77.
E-mail: szpd@szpd-print.ru